Exercices de Thermodynamique

« Ce fut la grande tâche et la grande gloire de la physique du XIX^e siècle d'avoir ainsi considérablement précisé et étendu en tous sens notre connaissance des phénomènes qui se jouent à notre échelle.
Non seulement elle a continué à développer la Mécanique, l'Acoustique, l'Optique, toutes ces grandes disciplines de la science classique, mais elle a aussi créé de toutes pièces des sciences nouvelles aux aspects innombrables : la Thermodynamique et la science de l'Électricité. »
Louis DE BROGLIE (1892-1987) – *Matière et Lumière, exposés généraux sur la physique contemporaine, 1* (1937)

■ Systèmes thermodynamiques

T1

Ex-T1.1 Grandeurs intensives et extensives (➤ Sol. p. 2)

Soit une mole d'un gaz occupant une volume V_m sous la pression P et à la température T.

1) On suppose que ces grandeurs sont liées par l'équation : $\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$, où a, b et R sont des constantes. Utiliser les propriétés d'intensivité ou d'extensivité des grandeurs pour établir l'équation correspondante relative à n moles.

2) Même question pour l'équation : $P(V_m - b)\exp\left(\frac{a}{RTV_m}\right) = RT$.

Ex-T1.2 Pour donner du sens au nombre d'Avogadro (➤ Sol. p. 2)

On considère du sable fin dont chaque grain occupe un volume $V_0 = 0,1\ mm^3$. Quel est le volume V occupé par $N = 6.10^{23}$ grains ? Si on étendait uniformément ce sable sur la France (d'aire $S = 550\,000\ km^2$) quelle serait la hauteur de la couche de sable ?

■ Considérations à l'échelle microscopique

T1

Ex-T1.3 Vitesse de libération et vitesse quadratique moyenne

1) Calculer numériquement à la surface de la Terre et de la Lune, pour une température $T = 300\ K$, la vitesse de libération v_l et la vitesse quadratique moyenne pour du dihydrogène et du diazote. Commenter.

Données : Constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ uSI$.
Rayon terrestre $R_T = 6,4.10^6\ m$; masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}\ kg$.
Rayon lunaire $R_L = 1,8.10^6\ m$; masse de la Lune $M_L = 7,4.10^{22}\ kg$.
Masses molaires : $M(H_2) = 2\ g.mol^{-1}$ et $M(N_2) = 28\ g.mol^{-1}$.
Constante des GP : $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

2) Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température T pour que le diazote, constituant majoritaire de l'atmosphère terrestre, échappe quantitativement à l'attraction terrestre ?

Rép : 1) Pour l'expression de la vitesse de libération ➜ Cf Cours de Mécanique et DSn^{0}5 : $v_{l,T} \simeq 11,2\ km.s^{-1}$ et $v_{l,L} \simeq 2,3\ km.s^{-1}$. de plus : $v_q(H_2) \simeq 1,9\ km.s^{-1}$ et $v_q(N_2) \simeq 0,5\ km.s^{-1}$.
2) Il faudrait $T_T \sim 100\,000\ K$ (!)

Ex-T1.4 Densité particulaire et volume molaire (➤ Sol. p. 2)

1) calculer le nombre de molécules par cm^3 dans un gaz parfait à $27°C$ sous une pression de 10^{-6} atmosphère.

2) Calculer le volume occupé par une mole d'un gaz parfait à la température de $0°C$ sous la pression atmosphérique normale. En déduire l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre molécules.

Solution Ex-T1.1

1) Comme $V_m = \dfrac{V}{n}$, on a :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \Leftrightarrow \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \Leftrightarrow \boxed{\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT}$$

Rq : on peut écrire l'équation d'état sous la forme $\left(P + \dfrac{A}{V^2}\right)(V - B) = nRT$ en posant $B = nb$ et $A = n^2 a$.

B est une grandeur extensive puisqu'elle est additive, si $n = n_1 + n_2$, $B = nb = n_1 n + n_2 b = B_1 + B_2$. A est aussi une grandeur extensive, mais elle n'est pas additive car si $n^2 a \neq n_1^2 a + n_2^2 a$.

2) $P(V - nb)\exp\left(\dfrac{na}{RTV}\right) = nRT$.

Solution Ex-T1.2

Le volume occupé est $V = N.v = 6.10^{13}\ m^3 = 6.10^{16}\ L$ (60 millions de milliards de litres !) . Ce sable étalé sur $S = 5,5.10^5\ km^2 = 5,5.10^{11}\ m^2$ formerait une couche de hauteur $h = \dfrac{V}{S} \simeq 110\ m$ (!).

Solution Ex-T1.3

1) D'après l'équation d'état du gaz parfait, le nombre de molécules par unité de volume est $n^* = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{k_B T} \simeq \dfrac{10^{-6}.1,01325.10^5}{1,38.10^{-23} \times 300} \simeq 2,5.10^{19}$ molécules par mètre cube soit $n^* \simeq 2,5.10^{13}$ molécules par cm^3 ou encore $n^* \simeq 4.10^{-11}\ mol.cm^{-3}$.

2) Le volume molaire cherché est : $V_m = \dfrac{RT}{V} = \dfrac{8,314 \times 273,15}{1,013.10^5} = 22,4.10^{-3}\ m^3 = 22,4\ L$.

T1

■ Modélisations de gaz réels

Ex-T1.4 Dioxyde de carbone

Pour le dioxyde de carbone (« gaz carbonique »), les cœfficients a et b de l'équation d'état de Van der Waals ont pour valeurs respectives $0,366\ kg.m^5.s^{-2}.mol^{-2}$ et $4,29.10^{-5}\ m^3.mol^{-1}$. On place deux moles de ce gaz dans une enceinte de volume $V = 1\ L$ à la température de $T = 300\ K$.

Q : Comparer les pressions données par les équations d'état du gaz parfait et du gaz de Van der Waals, la valeur exacte étant $P = 38,5\ bars$.

Rép : $P_{GP} = \dfrac{nRT}{V} \simeq 4,99.10^6\ Pa$, soit une erreur relative de $\left|\dfrac{P - P_{GP}}{P}\right| \approx 30\%$; $P_{VdW} = \dfrac{nRT}{V - nb} - \dfrac{n^2 a}{V^2} \simeq 3,99.10^6\ Pa$, soit une erreur relative de $\left|\dfrac{P - P_{VdW}}{P}\right| \approx 4\%$. Le modèle du gaz parfait est donc inacceptable, tandis que le modèle du gaz de Van der Waals montre une bien meilleure précision.

Ex-T1.5 Deux récipients

Un récipient (A) de volume $V_A = 1\ L$, contient de l'air à $t_A = 15°C$ sous une pression $P_A = 72\ cmHg$.

Un autre récipient (B) de volume $V_B = 1\ L$, contient également de l'air à $t_B = 20°C$ sous une pression $P_B = 45\ atm$.

On réunit (A) et (B) par un tuyau de volume négligeable et on laisse l'équilibre se réaliser à $t = 15°C$.

On modélise l'air par un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$. **Données :** le « centimètre de mercure » est défini par la relation $1\ atm = 76\ cmHg = 1,013.10^5\ Pa$.

Q : Quelle est la pression finale de l'air dans les récipients ? Quelle est la masse d'air qui a été transférée d'un récipient dans l'autre ?

Indications : Exprimer, initialement, les quantités de matière n_A et n_B dans les récipients. En déduire la quantité de matière totale. L'état final étant un état d'équilibre thermodynamique,

les variables intensives sont uniformes, dont la densité moléculaire et la pression. En déduire les quantités de matière finales n_{AF} et n_{BF}.
Rép : $m_{B\to A} = 26,1\ g$ et $P \simeq 22,5\ bars \simeq 22,2\ atm$.

Ex-T1.6 Point critique et équation réduite d'un gaz de Van der Waals (*)

1) Une mole de gaz de Van der Waals a pour équation d'état : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$

Exprimer P en fonction de T et V et calculer les dérivées partielles : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T$.

2) Montrer qu'il existe un unique état C tel que : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$.
Déterminer son volume molaire V_C, sa température T_C et sa pression P_C.

3) On pose $\theta = \frac{T}{T_C}$, $\nu = \frac{V}{V_C}$ et $\varpi = \frac{P}{P_C}$.
Montrer que l'équation d'état liant θ, ν et ϖ est universelle, c'est à dire qu'elle ne fait plus intervenir aucune constante dépendant du gaz.

Rép : 1) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$ et $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$
2) $C\left\{V_C = 3b\ ;\ T_C = \frac{8a}{27Rb}\ ;\ P_C = \frac{a}{27b^2}\right\}$ – **3)** $\left(\varpi + \frac{3}{\nu^2}\right)(\nu - 1) = 8\theta$

Ex-T1.7 Modélisations d'un gaz réel (*)

1) Le tableau ci-dessous donne avec trois chiffres significatifs exacts le volume molaire V (en $m^3.mol^{-1}$) et l'énergie interne molaire U (en $kJ.mol^{-1}$) de la vapeur d'eau à la température $t = 500°C$ pour différentes valeurs de la pression P (en $bars$). On donne en outre la constante des GP : $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

P	1	10	20	40	70	100
V	$6,43.10^{-2}$	$6,37.10^{-3}$	$3,17.10^{-3}$	$1,56.10^{-3}$	$8,68.10^{-4}$	$5,90.10^{-4}$
U	56, 33	56, 23	56, 08	55, 77	55, 47	54, 78

Justifier sans calcul que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un GP.

On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour lequel on a, pour une mole de gaz :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \quad \text{et} \quad U = U_{GP}(T) - \frac{a}{V}.$$

Calculer le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $P = 1\ bar$ et à $P = 100\ bars$.
Calculer b en utilisant l'équation d'état de l'état à $P = 100\ bars$.
Quelle valeur obtient-on alors pour U à $P = 40\ bars$?
Quelle température obtient-on alors en utilisant l'équation d'état avec $P = 40\ bars$ et $V = 1,56.10^{-3}\ m^3.mol^{-1}$?
Conclure sur la validité de ce modèle.

2) On réalise une détente isochore (ie à volume constant) d'une mole de vapeur d'eau de l'état initial $I\ \{t_I = 500°C; P_I = 100\ bars\}$ jusqu'à l'état final $F\ \{T_F = ?; P_F = 70\ bars\}$.
Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V (en $m^3.mol^{-1}$) et l'énergie interne molaire U (en $kJ.mol^{-1}$) de la vapeur d'eau sous $P = 70\ bars$ pour différentes valeurs de la température t (en $°C$).

t	300	320	340	360	380	400
V	$5,31.10^{-4}$	$5,77.10^{-4}$	$6,18.10^{-4}$	$6,54.10^{-4}$	$6,87.10^{-4}$	$7,20.10^{-4}$
U	47, 30	48, 38	49, 32	50, 17	50, 96	51, 73

Déterminer la température finale T_F et la variation d'énergie interne $\Delta U = U_F - U_I$.

Rép : **1)** $U_{H_2O_{(g)}}$ ne vérifie pas la première loi de Joule : $H_2O_{(g)}$ ne se comporte pas comme un gaz parfait. Modélisation de VdW : $a = 9,23.10^{-1}\ J.m^{-3}.mol^{-1}$ et $b = 8,2.10^{-5}\ m^3.mol^{-1}$.
2) $T_F = 599\ K$ et $\Delta U = U_F - U_I = -6,1\ kJ.mol^{-1}$.

■ Cœfficients thermoélastiques et phases condensées

T1

Ex-T1.8 Gaz de Van der Waals

Une mole de dioxyde de carbone CO_2 obéit à l'équation de Van der Waals : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, où V est le volume molaire du gaz.
Déterminer le cœfficient de dilatation à pression constante α en fonction des variables indépendantes T et V, des constantes a, b et de R.
Retrouver son expression α_{GP} dans le cas d'un gaz parfait.

Rép : $a = \dfrac{R}{-\dfrac{2a}{V^2}(V-b) + \dfrac{RTV}{V-b}}$ et on vérifie que $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} \alpha = \dfrac{1}{T} = \alpha_{\text{GP}}$.

Ex-T1.9 Gaz de Joule

Une mole de gaz de Joule obéit à l'équation d'état : $P(V - b) = RT$, où V est le volume molaire du gaz.
Déterminer le cœfficient de compressibilité isotherme χ_T en focntion des variables indépendantes V, P, et b.
Retrouver son expression $\chi_{T,\text{GP}}$ dans le cas d'un gaz parfait. Exprimer l'écart relatif : $\dfrac{\chi_T - \chi_{T,\text{GP}}}{\chi_{T,\text{GP}}}$.
Comparer les compressibilité d'un gaz de Joule et d'un gaz parfait.

Rép : $\chi_T = \left(1 - \dfrac{b}{V}\right)\dfrac{1}{P}$ et on vérifie que $\lim\limits_{b\to 0} \chi_T = \dfrac{1}{P} = \alpha_{\text{GP}}$.
$\dfrac{\chi_T - \chi_{T,\text{GP}}}{\chi_{T,\text{GP}}} = -\dfrac{b}{V} < 0 \quad \to$; donc le gaz de Joule est moins compressible que le gaz parfait.

Ex-T1.10 Eau liquide

Une mole d'eau liquide est caractérisée dans un certain domaine de températures et de pressions autour de l'état 0 où $\{P_0 = 1\ bar; T_0 = 293\ K; V_0 = 10^{-3}\ m^3\}$, par un coefficient de dilatation isobare $\alpha = 3.10^{-4}\ K^{-1}$ et par un coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 5.10^{-10}\ Pa^{-1}$ constants.
1) Établir que l'équation d'état liant V, P et T de ce liquide est :

$$\ln\frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$$

2) Calculer son volume molaire sous $P = 1\,000\ bars$ et à $T = 293\ K$. Commenter.
3) Une mole d'eau liquide est enfermée dans une bouteille métallique de volume V_0 constant. Par suite d'un incendie, la température passe de $T_0 = 293\ K$ à $T = 586\ K$.
Calculer la pression P dans le récipient et commenter. Reprendre le calcul pour un gaz parfait et commenter.

Rép : **2)** $V = 9,51.10^{-4}\ m^3$ soit $\left|\dfrac{\Delta V}{V_0}\right| = 5\%$. **3)** $P = P_0 + \dfrac{\alpha(T - T_0)}{\chi_T} = 1,8.10^3\ bar$: cette pression est très élevée : la bouteille risque d'exploser.

■ « Atmosphère ! atmosphère !. . . »

Ex-T2.1 Masse de l'atmosphère

On travaille avec le modèle d el'atmosphère isotherme avec $T = 290\ K$. Le champ de pesanteur est supposé uniforme ($g = 9,8\ m.s^{-2}$) et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$. On note $P_0 = 10^5\ Pa$ la pression de l'air au niveau du sol ($z = 0$) et on choisit un axe vertical Oz ascendant.

1) retrouver la loi du nivellement barométrique $P(z)$ pour l'atmosphère isotherme. À quelle altitude z_1 la pression vaut-elle $\frac{P_0}{2}$? **A.N.**

2) En supposant cette loi valable de $z = 0$ à « l'infini » calculer la masse M_{atm} de l'atmosphère et faire l'application numérique avec $R_T = 6\,400\ km$.

Rép : **1)** $z_1 = 5\,900\ m$; **2)** Conseil pour éviter une intégration par partie : remarquer que l'épaisseur de l'atmosphère est telle que $z \ll R_T \rightarrow M_{\mathsf{atm}} \approx 5.10^{18}\ kg$.

Ex-T2.2 Pression atmosphérique en altitude

Calcul de la pression atmosphérique au sommet du Mont Blanc ($4807\ m$) dans les deux cas suivants :

1) On suppose que la température de l'atmosphère est constante et égale à T_0.

2) On suppose que la température varie avec l'altitude suivant la loi :

$$T = T_0 - A.z \qquad \text{avec} \qquad A = 6,45.10^{-3}\ K.m^{-1}$$

Données : Température à l'altitude $z = 0$: $T_0 = 290\ K$; pression à l'altitude $z = 0$: $P_0 = 1,013\ bar$; masse molaire de l'air : $M = 29\ g.mol^{-1}$.

Rép : **1)** $P = 0,575.10^5\ Pa$; **2)** $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{Az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{RA}} \rightarrow P = 0,557.10^5\ Pa$.

Ex-T2.3 Variation de g avec l'altitude

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, à la température T, on considère ici que le champ de pesanteur g varie avec l'altitude suivant la relation : $g(z) = g_0.\left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2$, R_T représentant le rayon de la Terre.

Au niveau du sol ($z = 0$), on note g_0 le champ de pesanteur et P_0 la pression.

→ Montrer que la loi de variation $P(z)$ dans ces conditions s'écrit :

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{M\,g_0\,R_T^2}{R.T}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + z}\right)$$

Ex-T2.4 Atmosphère polytropique (*)

L'air est assimilé à un GP de masse molaire M et on se donne dans l'atmosphère une relation phénoménologique de la forme : $\frac{P(z)}{\rho(z)^k} = \mathsf{Cte}$, appelée relation polytropique d'indice k. k est une constante donnée, ajustable a postériori aux données expérimentales. Le modèle de l'atmosphère polytropique constitue une généralisation du modèle de l'atmosphère isotherme pour lequel on aurait $k = 1$. Dans la suite on prend $k \neq 1$.

Au niveau du sol, en $z = 0$, on note la pression P_0, la température T_0 et la masse volumique ρ_0.

→ Établir que $P(z)$ est donnée par la relation implicite suivante :

$$\frac{k}{k-1}\left(P^{1-\frac{1}{k}} - P_0^{1-\frac{1}{k}}\right) = -\frac{\rho_0 g z}{P_0^{\frac{1}{k}}}$$

→ en déduire $T(z)$ et montrer que $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ est une constante.

A. N. : calculer k sachant que $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -7.10^{-3}\ K.m^{-1}$.

Rép : $T(z) = -\frac{k-1}{k}\frac{Mgz}{R} + T_0 \rightarrow k = \frac{Mg}{R}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{R}} = 1,26$

■ poussée d'Archimède

T2

Ex-T2.5 Ascension d'un ballon de volume constant (*)

Un ballon sphérique, de volume fixe $V = 3\ L$, est gonflé à l'hélium ($M = 4\ g.mol^{-1}$) à la pression de 1 bar et à la température de 293 K. L'enveloppe du ballon est en aluminium et a une masse $m = 2\ g$.
La pression au niveau du sol vaut $P_0 = 1\ bar$ et la température vaut $T_0 = 293\ K$. La température varie en fonction de l'altitude selon la loi : $T(z) = T_0\,(1 - az)$, avec $a = 2.10^{-2}\ km^{-1}$.

1) Exprimer la pression $P(z)$ à l'altitude z en fonction de T_0, P_0, a et de la constante $K = \frac{M_{\mathsf{air}}g}{RT_0a}$.
2) On lâche le ballon. Jusqu'à quelle altitude s'élèvera-t-il ?

Rép : **1)** $P(z) = P_0(1-az)^K$; **2)** $z = \frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{RT_0m}{P_0M_{\mathsf{air}}V} + \frac{M}{M_{\mathsf{air}}}\right)^{\frac{1}{K-1}}\right] = 3\,580\ m$

Ex-T2.6 Couronne « en toc » ? (➤ Sol. p. 8)

Immergée dans l'eau, une couronne de $m = 14,7\ kg$ a une masse apparente de $13,4\ kg$. Cette couronne est-elle en or pur ?
Donnée : masses volumiques de l'or, de l'argent et du plomb : $\rho_{\mathsf{Au}} = 19,3.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_{\mathsf{Ag}} = 10,5.10^3\ kg.m^{-3}$ et $\rho_{\mathsf{Pb}} = 11,3.10^3\ kg.m^{-3}$

Ex-T2.7 Volume de l'enveloppe d'une montgolfière (➤ Sol. p. 8)

Quel volume d'hélium doit contenir une montgolfière pour pouvoir soulever une masse $m = 800\ kg$ (incluant le poids de la nacelle, de l'enveloppe, du chargement, ...) ?
Donnée : masses volumiques, à $T = 273\ K$ et $P = 1\ atm$: $\rho_{\mathsf{air}} = 1,29\ kg.m^{-3}$ et $\rho_{\mathsf{He}} = 0,179\ kg.m^{-3}$

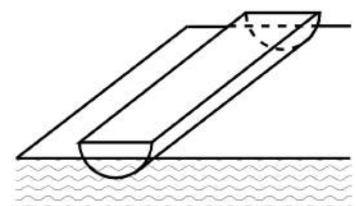
Ex-T2.8 Équilibre d'un bouchon de liège

Un bouchon de liège cylindrique de hauteur $H = 5\ cm$ et de section $s = 2\ cm^2$ est placé verticalement dans une éprouvette graduée également cylindrique, de diamètre légèrement supérieur. Les frottements sur les parois sont négligés. L'éprouvette contient une quantité d'eau suffisante pour que le bouchon flotte sans toucher le fond.
Données : Masses volumiques : $\rho_{\text{eau}} = 1,00\ g.cm^{-3}$; $\rho_{\text{liège}} = 0,24\ g.cm^{-3}$; $\rho_{\text{glace}} = 0,92\ g.cm^{-3}$.
1) Déterminer la hauteur h de liège immergée.
2) On pose sur le bouchon une pièce de monnaie de masse $m = 6\ g$. Quelle est la nouvelle hauteur immergée h' ?
3) On remplace le bouchon par un glaçon cylindrique de même forme. Quelle est la hauteur de glace immergée h'' ? Que se passe-t-il si on pose la pièce précédente sur le glaçon ?

Rép : **1)** $h = 1,2\ cm$; **2)** $h' = 4,2\ cm$; **3)** $h'' = 4,6\ cm$.

Ex-T2.9 Oscillations d'un demi-cylindre flottant (*)

Un demi-cylindre de rayon R flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ.
1) À l'équilibre, il est enfoncé de $\frac{R}{2}$ dans le liquide. Quelle est sa masse volumique μ ?
2) Hors équilibre, quelle est la période des petites oscillations verticales de l'objet ?



Rép : **1)** $\mu = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\rho$; **2)** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right)}$

■ Liquides

Ex-T2.10 **Pression dans une fosse océanique** (➤ Sol. p. 9)

On considère une fosse océanique de profondeur $H = 10\ km$. La pression à la surface de l'eau est $P_0 = 1\ bar$ et on supposera la température uniforme et égale à T_0.

1) Calculer la pression $P(H)$ au fond de la fosse en supposant l'eau incompressible. **A.N.**

2) On veut déterminer $P(H)$ en tenant compte de la compressibilité de l'eau. On doit donc considérer que la masse volumique ρ de l'eau dépend maintenant de la profondeur z (prise nulle à la surface libre de l'eau). On notera ρ_0 la masse volumique de l'eau à la surface.

a) Montrer que le cœfficient de compressibilité isotherme peut s'écrire : $\chi_T = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T$

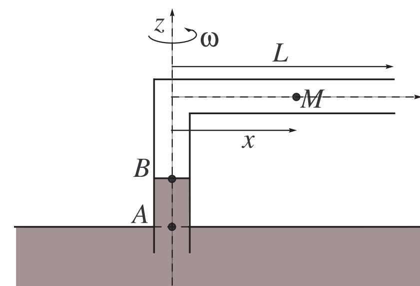
→ Que devient cette expression puisque $T = T_0 =$ Cte ? En déduire $\dfrac{d\rho}{dz}$

b) déduire de la question précédente les expressions de $\rho(z)$, puis de $P(z)$

c) **A.N. :** calculer $\rho(H)$ et $P(H)$ avec $\chi_T = 4,9.10^{-10}\ Pa^{-1}$. Commenter.

Rép : 1) $P(H) = 9,8.10^2\ bars$; **2.a)** $\dfrac{d\rho}{dz} = \chi_T g \rho^2$; **2.b)** séparer les variables dans l'équation précédente, puis intégrer entre la surface libre ($z = 0$) et z : $\rho(z) = \dfrac{\rho_0}{1 - \rho_0 g z \chi_T}$ et $P(z) = P_0 + \dfrac{1}{\chi_T}\ln\left(\dfrac{1}{1-\rho_0 g z \chi_T}\right)$

Ex-T2.11 **Tube coudé en rotation** (➤ Sol. p. 9)



Un tube coudé plonge dans de l'eau ($\rho_e = 10^3\ kg.m^3$). Il tourne autour de la verticale Oz ascendante dans le référentiel terrestre à la vitesse angulaire ω. La pression atmosphérique est notée P_a. On note ρ la masse volumique de l'air supposée uniforme et constante. La section du tube est supposée très faible.

1) On raisonne dans le référentiel lié au tube, qui n'est donc pas galiléen. L'air est en équilibre dans ce référentiel. On considère une tranche élémentaire d'air de masse dm comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

a) Quelles sont les forces qui s'exercent sur cette tranche élémentaire de fluide ?

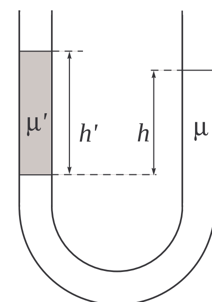
b) On fait l'hypothèse que l'effet du poids est négligeable. En s'inspirant de la seconde démonstration de la RFSF établir en cours, établir que l'équation différentielle reliant la dérivée de la pression $\dfrac{dP}{dx}$, ρ, ω et x.

c) calculer la pression $P(x)$ de l'air dans le tube à une distance x de l'axe Oz en fonction de P_a, ω, L et x.

2) déterminer la dénivellation $d = AB$ du liquide.

Rép : 1.b) $\dfrac{dP}{dx} = \rho\omega^2 x$; **1.c)** $P(x) = P_a + \dfrac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 - L^2)$; **2)** $d = \dfrac{1}{2\rho_e g}\rho\omega^2 L^2$.

Ex-T2.12 **Hydrostatique dans un tube en U**



Soit un tube en U dans lequel se trouvent deux liquides de masses volumiques respectives μ et μ'. On note respectivement h et h' les dénivellations entre les surfaces libres des liquides et leur interface.

→ Exprimer le rapport des dénivellations en fonction des masses volumiques des deux liquides.

Rép : $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{\mu}{\mu'}$.

Ex-T2.13 **Équilibre dans un tube en U**

Un tube en U de section constante $s = 1\ cm^2$, ouvert aux deux extrémités, contient de l'eau.

1) On ajoute dans la branche de droite un volume $V_h = 6\ cm^3$ d'huile.

→ Déterminer la dénivellation entre la surface libre de l'eau et la surface de séparation (interface) eau-huile.

2) À partir de l'état d'équilibre précédent, on ajoute dans l'autre branche du tube en U un volume $V_a = 10\ cm^3$ d'acétone.

→ Déterminer la dénivellation d entre les deux interfaces eau-huile et eaux-acétone ainsi que la dénivellation d' entre les deux surfaces libres.

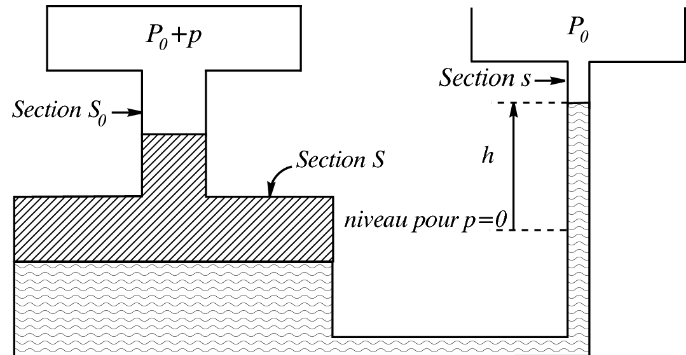
Données : Masses volumiques : $\rho_{\text{eau}} = 1,00\ g.cm^{-3}$; $\rho_{\text{huile}} = 0,90\ g.cm^{-3}$; $\rho_{\text{acétone}} = 0,79\ g.cm^{-3}$.

Rép : **1)** $h_{\text{eau}} = 5,4\ cm$; **2)** $d = 2,5\ cm$ et $d' = 1,\ cm$.

Ex-T2.14 Manomètre différentiel (*)

Relier le déplacement du niveau du liquide dans le manomètre différentiel représenté ci-dessous à la surpression p régnant dans le récipient de gauche.

Commenter le résultat en le comparant à la relation que l'on obtiendrait pour un manomètre classique à tube de section constante ($S = s = S_0$).



Rép : $p = \rho g h \dfrac{s+S}{S_0}$

Ex-T2.15 Dilatation d'un Gaz Parfait

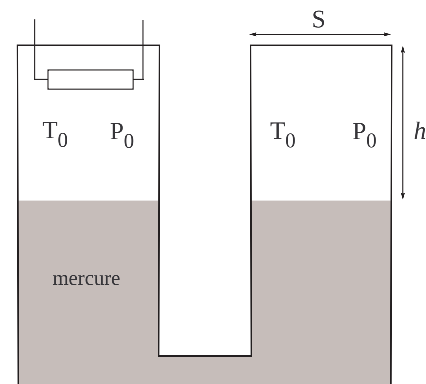
On considère le dispositif suivant, rempli partiellement de mercure et dont chacune des deux branches, hermétiquement scellée, contient une même quantité de gaz parfait à la température T_0, sous la pression P_0.

La hauteur commune aux deux colonnes de gaz est h et la section des deux récipients est S.

Données : $T_0 = 293\ k$; $P_0 = 1,013\ bar$; $h = 40\ cm$ et $\rho_{\text{mercure}} = 13,6 g.cm^{-3}$.

On chauffe, au moyen de la résistance, la gaz contenu dans une des deux branches, jusqu'à la température T_1. À l'équilibre, la dénivellation entre les deux surfaces libres du mercure est $d = 10\ cm$.

→ Calculer la température T.



Rép : $T_1 = T_0 \left[\dfrac{2h+d}{2h-d} + \dfrac{\rho g d}{P_0} \dfrac{2h+d}{2h} \right]$

Solution Ex-T2.6

Le poids apparent de l'objet immergé P' est le poids réel P de la couronne (de masse volumique ρ_0 et de volume V) soustrait du poids des fluides déplacés (l'eau en l'occurrence) : $P' = P + F_A = P - P_f = mg - m_f g = \rho_0 V g - \rho_f g V = (\rho_0 - \rho_{\text{eau}}) V g$.

On a donc : $\dfrac{P}{P-P'} = \dfrac{mg}{(m-m_f)g} = \dfrac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_{\text{eau}}} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \dfrac{P}{P-P'}\rho_{\text{eau}} = 11,3.10^3\ kg.m^{-3}$: la couronne est certainement en plomb et non en or pur !

Solution Ex-T2.7

La poussée d'Archimède subie par le volume V d'hélium de la montgolfière est égale à l'opposée du poids de l'air atmosphérique déplacé ($|F_A| = P_f = \rho_{\text{air}} V g$). Cette poussée doit au moins compenser le poids correspondant à la masse m de la montgolfière (enveloppe, poids d'hélium, nacelle et chargement) : $|F_A| = (m_{\text{He}} + m)g \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\text{air}} V g = (\rho_{He} V + m) g$, qui conduit à :

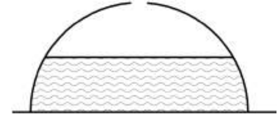
$V = \dfrac{m}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}}} \simeq 720\ m^3$

T2

■ Forces de pression

Ex-T2.16 **Soulèvement d'une calotte sphérique**

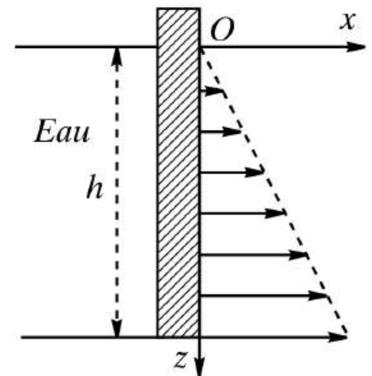
Pour quelle hauteur d'eau la cloche sphérique de rayon R, de masse m, renversée sur le plan horizontal, va-t-elle se soulever ?



Rép : $h = \left(\dfrac{3m}{\rho\pi}\right)^{\frac{1}{3}} < R \quad \Rightarrow \quad m < \dfrac{R^3\rho\pi}{3}$

Ex-T2.17 **Poussée exercée sur une paroi plane**

Un récipient contient de l'eau de masse volumique ρ.
On s'intéresse aux efforts exercés par le fluide sur la paroi plane du récipient de surface $S = h\,L$.

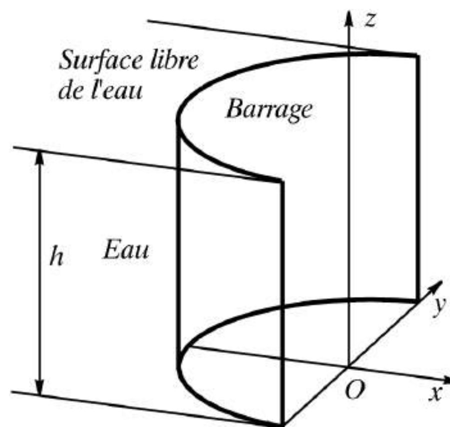


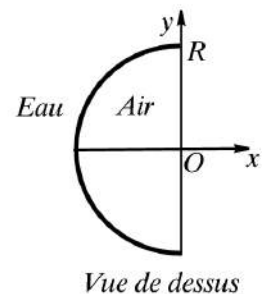
1) Quelle est la poussée exercée par le fluide sur un élément de paroi horizontal ? sur toute la paroi ?
2) Montrer que, pour le calcul du moment résultant de ces actions, tout se passe comme si cette force résultante s'appliquait en un point C de la paroi, appelé Centre de Poussée, à déterminer.

Rép : **1)** $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{2}\rho g L h^2\,\overrightarrow{e_x}$;
2) $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \dfrac{1}{3}\rho g L h^3\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F}$ avec $\overrightarrow{OC} = \dfrac{2}{3}h\,\overrightarrow{e_z}$.

Ex-T2.18 **Calcul d'une résultante des force de pression - barrage hémicylindrique**

Le barrage hémicylindrique de rayon R représenté sur la figure ci-contre est rempli d'eau sur une hauteur h.
→ Déterminer la résultante des forces exercées par l'air et par l'eau.
→ Comparer à la résultante exercée sur un barrage plan de hauteur h et de largeur L (cf. exercice précédent).





Rép : $\overrightarrow{F} = \rho g R h^2\,\overrightarrow{e_x}$

Solution Ex-T2.10

1) On choisit l'axe Oz descendant (comme dans la question **2)**). Pour un fluide incompressible, la **RFSF** conduit à : $P(z) = P_0 + \rho g z$. On a donc : $P(H) = P_0 + \rho g H = 980\ bars$.

2.a) Par définition (➜ Cf Cours **T1**), le cœfficient de compressibilité istoherme s'écrit : $\chi_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. Considérons une particule fluide centrée en M, à la profondeur z, de masse constante m (on travaille avec un système fermé) et de volume V : $\{M, \mathrm{d}m, \mathrm{d}V\}$. En notant $\mathrm{d}V = \delta V$, χ_T s'écrit à l'échelle mésoscopique : $-\dfrac{1}{\delta V}\left(\dfrac{\partial(\delta V)}{\partial P}\right)_T$ et $\mathrm{d}m = \rho.\delta V \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \dfrac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V} = 0$,
ce qui conduit à : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\dfrac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V}$, soit, en différentiant $\rho = \rho(P,T)$ et $\delta V = \delta V(P,T)$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} & = & \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P \quad -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T \\ -\dfrac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V} & = & \underbrace{-\dfrac{1}{\delta V}\left(\dfrac{\partial \delta V}{\partial P}\right)_T}_{\chi_T} \mathrm{d}P \quad -\dfrac{1}{\delta V}\left(\dfrac{\partial \delta V}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}(\delta V)}{\delta V}} \boxed{\chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T}$$

Comme la température T est uniforme (et constante), on a

$$\chi_T = \chi_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}} \xrightarrow[\text{car } Oz \text{ desc.}]{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=+\rho z} \boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = \chi_T g \rho^2}$$

2.b) En séparant les variables dans l'équation précédente : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} = \chi_T g \mathrm{d}z$, puis en intégrant entre la surface libre ($z = 0$) et z :

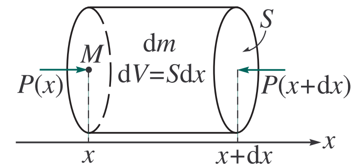
$$\int_{\rho_0}^{\rho(z)} \frac{\mathrm{d}\rho'}{\rho'^2} = \int_0^z \chi_T g \mathrm{d}z' \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\rho(z)} + \frac{1}{\rho_0} = \chi_T g z \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \chi_T \rho_0 g z}}$$

La **RFSF** $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho(z) g$ conduit à $\mathrm{d}P = \rho(z) g \mathrm{d}z$, soit, par intégration :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \mathrm{d}P' = \int_0^z \frac{\rho_0 g}{1 - \chi_T \rho_0 g z'} \mathrm{d}z' \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(z) = P_0 + \frac{1}{\chi_T}\ln\left(\frac{1}{1 - \rho_0 g z \chi_T}\right)}$$

2.c) On trouve $\rho(H) = 1,05.10^3\ kg.m^{-3}$ et $P(H) = 1\,005\ bars$. Du fait du caractère compressible de l'eau, sa densité au fond de la fosse océanique est 5% supérieure à celle de la surface : l'eau est donc peu compressible et la valeur de $P(H)$ est très peu différente de celle calculée à la première question.

Solution Ex-T2.11



1.a) On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au tube, qui est non galiléen car en rotation dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$. Les forces qui s'exercent sur une tranche élémentaire d'air de masse $\mathrm{d}m$ sont :

- le poids $\mathrm{d}\overrightarrow{P} = \mathrm{d}m\overrightarrow{g}$
- la force pressante qui s'exercent sur la paroi latérale du cylindre élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{pl}}$
- la force pressante qu'exerce le reste de l'air en x : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(x) = P(x)S\overrightarrow{e_x}$
- la force pressante qu'exerce le reste de l'air en $x + \mathrm{d}x$: $\mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(x+\mathrm{d}x) = -P(x+\mathrm{d}x)S\overrightarrow{e_x}$
- la force d'inertie d'entraînement centrifuge : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{ie}} = -\mathrm{d}m\overrightarrow{a_e}(M) = \mathrm{d}m\omega^2\overrightarrow{HM} = \mathrm{d}m\omega^2 x\overrightarrow{e_x}$

Rq : la force de Coriolis est nulle car la vitesse relative de la particule fluide est nulle, l'énoncé précisant que « l'air est en équilibre »dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au tube.

1.b) La **RFSF** donne : $\mathrm{d}m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \mathrm{d}\overrightarrow{P} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{pl}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(x) + \mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(x+\mathrm{d}x) + \mathrm{d}\overrightarrow{F_{ie}}$

Comme le poids est négligeable, cela revient à négliger $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{pl}}$ (qui le compense, le mouvement, lorsqu'il a lieu, ne pouvant se faire que selon Ox), la **RFSF** devient, en projection selon Ox, à l'équilibre :

$$P(x)S - P(x+\mathrm{d}x)S + \mathrm{d}m x\omega^2 = 0 \xrightarrow[P(x+\mathrm{d}x)-P(x)=\mathrm{d}P=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x]{\mathrm{d}m=\rho.\mathrm{d}V=\rho.S\mathrm{d}x} -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.S + \rho.S\mathrm{d}x.\omega^2 x = 0$$

D'où : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \rho\omega^2 x}$

1.c) Après avoir séparé les variables, on intègre l'équation précédente, sachant que $P(L) = P_a$:

$$\int_{P(x)}^{P(L)} \mathrm{d}P = \int_x^L \rho\omega^2 x.\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ P(L) - P(x) = \rho\omega^2\left(\frac{L^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \ \Leftrightarrow\ \boxed{P(x) = P_a + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 - L^2)}$$

2) On peut calculer la pression $P(N)$ de l'air dans le tube horizontal pour $x = 0$: $P(N) = P_a - \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 L^2$. Cette pression est quasiment la pression $P(B)$ car la pression d'un gaz varie très

peu avec l'altitude pour de petites dénivellations (➜ Cf Cours **T2**) → $P(B) = P(N)$.
La RFSF dans le liquide conduit à : $P(A) + \rho_e g z_A = P(B) + \rho_e g z_B$, avec $P(A) = P_a$ (isobare du liquide sur le plan horizontal passant par A).

On en déduit : $d = z_B - z_A = \frac{1}{2\rho_e g}\rho\omega^2 L^2$

" En 1847, un pas décisif est finalement franchi par Joule : la connexion entre la chimie, la science de la chaleur, l'électricité, le magnétisme et la biologie est interprétée comme une *conversion*. La conversion généralise ce qui se produit au cours des mouvements mécaniques : à travers tous les phénomènes étudiés en laboratoire on postule que « quelque chose » se conserve quantitativement et change de forme qualitative. Pour définir les rapports entre ces formes qualitatives, Joule définit un *équivalent* général des transformations physico-chimiques, qui donne le moyen de mesurer la grandeur qui se conserve et qui sera plus tard identifiée comme « énergie ». Il établit la première équivalence en mesurant le travail mécanique nécessaire pour élever d'un degré la température d'une quantité d'eau. La science quantitative des processus physico-chimiques est, dès lors, reconnue dans son unité. La conservation d'une grandeur physique, l'énergie, à travers les transformations que peuvent subir les systèmes physiques, chimiques, biologiques va dès lors être mise à la base de ce que nous pouvons appeler la science du complexe. Elle va en constituer le fil conducteur, qui permettra d'explorer de manière cohérente la multiplicité des processus naturels."

Ilya Prigogine & Isabelle Stengers – La Nouvelle Alliance (1979)

■ Bilans énergétiques et transformations thermodynamiques

T3

Ex-T3.1 Vitesse des « baffes » d'Obélix

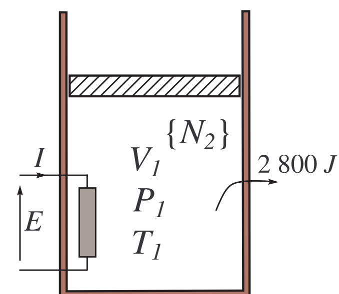
Imaginez qu'Obélix vous gifle ! Vous ressentez une rougeur à la joue. La température de la région touchée a varié de $1,8°C$.
En supposant que la masse de la main qui vous atteint est de $1,2\ kg$ et que la masse de la peau rougie est de $150\ g$, estimez la vitesse de la main juste avant l'impact, en prenant comme valeur de la capacité thermique massique de la peau de la joue : $c_{\text{joue}} = 3,8\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.



Rép : $v = \sqrt{\frac{2m_{\text{joue}}c\Delta T}{m_{\text{main}}}} = 41,4\ m.s^{-1} = 149\ km.h^{-1}$

Ex-T3.2 Chauffage d'un gaz à l'aide d'un élément électrique

Soit un système piston-cylindre contenant $V_1 = 0,5\ m^3$ d'azote à $P_1 = 400\ kPa$ et à $\theta_1 = 27°C$.
L'élément chauffant électrique est allumé, et un courant $I = 2\ A$ y circule pendant $\tau = 5\ min$ sous la tension $E = 120\ V$.
L'azote se détend de manière isobare. Au cours de cette transformation, l'ensemble {gaz, cylindre, élément chauffant} cède à l'extérieur un transfert thermique $Q_{\text{ext}} = 2\,800\ J$.
Déterminer la température finale T_2 de l'azote.

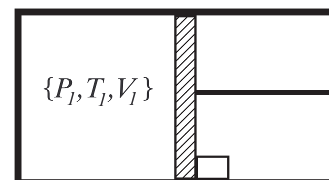


Données : $M(N_2)$ est supposée connue ; capacité thermique massique à pression constante du diazote : $c_P = 1,039\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.

Rép : $T_2 = 329,7\ K$

Ex-T3.3 Transformation adiabatique

Un Gaz Parfait monoatomique est enfermé dans un cylindre fermé par un piston dans les conditions $\{P_1, T_1, V_1\}$. L'ensemble est adiabatique. La pression atmosphérique, notée P_0 , est telle que $P_0 > P_1$. On libère brusquement le piston.



1) La transformation est-elle seulement adiabatique ? Exprimer le travail des forces pressantes qu'il reçoit en fonction de P_0, V_1 et V_F, volume final qu'il occupe.

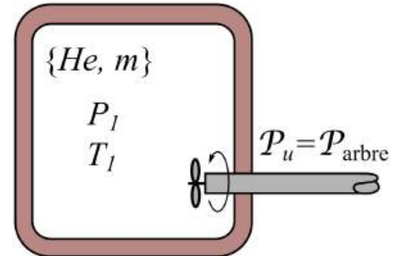
2) Donne l'expression qui relie les variations d'énergie interne ΔU et d'enthalphie ΔH au cœfficient γ. Quelle est la valeur de γ pour le gaz parfait considéré ? En déduire ΔU et ΔH en fonction des seules données P_1, V_1, T_1 et T_F, température finale du gaz parfait.

3) Exprimer V_F et T_F à l'équilibre final en fonction des seules données P_1, V_1, T_1 et P_0.

Rép : **1)** $W = -P_0(V_F - V_1)$; **2)** $\Delta U = \Delta U_{\text{GPM}} = \frac{3}{2}\frac{P_1 V_1}{T_1}(T_F - T_1)$ et $\Delta H = \gamma \Delta U$; **3)** $V_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{5P_0} V_1$ et $T_F = \frac{2P_0 + 3P_1}{2P_1} T_1$

Ex-T3.4 Utilisation d'un agitateur

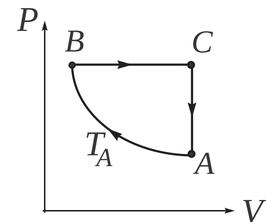
Un réservoir rigide et adiabatique (calorifugé) contient $m = 1\ kg$ d'hélium à la température $T_1 = 300\ K$ et à la pression $P_1 = 300\ kPa$.
L'hélium est brassé à l'aide d'un agitateur de puissance utile $15\ W$. On le fait fonctionner pendant $\tau = 30\ min$. Déterminer la température finale T_2 et la pression finale P_2 de l'hélium.
Donnée : capacité thermique (moy.) à volume constant de l'hélium : $c_V = 3,1156\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.



Rép : $T_2 = 308,7\ K$; $\mathcal{P}_2 = 308,7\ kPa$

Ex-T3.5 transformation cyclique

Une mole de GPM contenue dans un cylindre décrit de manière quasi-statique et mécaniquement réversible le cycle ABCA décrit ci-contre.
L'évolution AB est isotherme à la température $T_A = 301\ K$. En A, $P_A = 1,0\ bar$. L'évolution BC est isobare à la pression $P_B = 5,0\ bars$.
L'évolution CA est isochore.



1) Calculer les volumes V_A, V_B et V_C et la température T_C.
2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

Rép : **1)** $V_A = V_C = 25\ L$; $V_B = 5\ L$; $T_C \simeq 1\,500\ K$; **2)** $W_{AB} = -RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 4,03\ kJ$; $Q_{AB} = -W_{AB}$; $W_{BC} = P_B(V_A - V_C) = -10\ kJ$; $Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = 25\ kJ$; $W_{CA} = 0\ J$; $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = C_{Vm}(T_A - T_C) = -15\ kJ$ — on vérifie que $\Delta U_{\text{cycle}} = U_A - U_A = 0$ car $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$.

Ex-T3.6

Une mole de gaz réel monoatomique d'équation d'état $\left(P + \dfrac{a}{V^2}\right) V = RT$ et d'énergie interne $U = \dfrac{3RT}{2} - \dfrac{a}{V}$ décrit le même cycle que dans l'**Ex-T3.5**.
On donne $T_A = 301\ K$; $V_A = 5,0\ L$; $V_B = 0,50\ L$ et $a = 0,135\ m^6.Pa.mol^{-2}$.
1) Calculer P_A, P_B, P_C et T_C.
2) Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

Rép : **1)** $P_A = 4,95\ bars$, $P_B = P_C = 44,6\ bars$ et $T_C = 2\,688\ K$; **2)** $W_{AB} = RT_A \ln \frac{V_A}{V_B} + a(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}) = 5,52\ kJ$; $Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = -5,76\ kJ$; $W_{BC} = P_B(V_B - V_C) = -20,1\ kJ$; $Q_{BC} = 50,1\ kJ$; $W_{CA} = 0\ kJ$; $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_C) = -29,8\ kJ$

Ex-T3.7 Comparaison de deux évolutions possibles entre deux états

Un récipient de volume $V_A = 5\,L$ fermé par un piston contient $n = 0,5\ mol$ de gaz parfait, initialement à la température $T_A = 287\,K$. On porte de façon quasi statique le volume du gaz à une valeur $V_B = 20\,L$, à la température $T_B = 350\,K$. On donne pour ce gaz le cœfficient $\gamma = 1,4$.
Le passage de A à B s'effectue de deux manières différentes :
- évolution (a) ($A \to C \to B$) : chauffage isochore de $287\,K$ à $350\,K$ (transformation $A \to C$) puis détente isotherme de V_A à V_B à la température $T_1 = 350\,K$ (transformation $C \to B$) ;
- évolution (b) ($A \to D \to B$) : détente isotherme de V_A à V_B à la température $T_2 = 287\,K$ (transformation $A \to D$) puis chauffage isochore de $287\,K$ à $350\,K$ (transformation $D \to B$).

1) Représenter les deux évolutions précédentes en coordonnées de Clapeyron (= dans le diagramme (P, V)).
2) Exprimer puis calculer le travail $W_{(a)}$ et le transfert thermique $Q_{(b)}$ reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne $\Delta U_{(a)}$ du gaz lors de la première série de transformations.
3) Exprimer puis calculer le travail $W_{(b)}$ et le transfert thermique $Q_{(b)}$ reçus par le gaz ainsi que la variation d'énergie interne $\Delta U_{(b)}$ du gaz lors de la seconde série de transformations.
4) Comparer les deux possibilités d'évolution de A à B. Conclusion ?

Rép : **2)** $W_{(a)} = nRT_1 \ln \frac{V_A}{V_B} = -2\,017\ J$; $\Delta U_{(a)} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = 655\ J$; $Q_{(a)} = \Delta U_{(a)} - W_{(a)} = nR(\frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1} - T_1 \ln \frac{V_A}{V_B}) = 2\,672\ J$; **3)** $W_{(b)} = -1\,654\ J$; $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$; $Q_{(b)} = \Delta U_{(b)} - W_{(b)} = 2\,309\ J$; **4)** $\Delta U_{(b)} = \Delta U_{(a)}$ puisque la variation d'une fonction d'état entre deux états thermodynamiques données ne dépend pas du « chemin » suivi pour aller de l'état initial à l'état final. Par contre, le travail et le transfert thermiques, qui ne sont pas des fonctions d'états, caractérisent les transformations entre A et B : $W_{(a)} \neq W_{(b)}$ et $Q_{(a)} \neq Q_{(b)}$.

Ex-T3.8 **Gaz de Joule et Détente de Joule-Gay Lussac** Soit une masse m d'un gaz réel satisfaisant à l'équation d'état : $P(V - b) = nRT$ avec $b = 5.10^{-6}\ m^3$. On donne deux états de cette masse : $\{P_2 = 50\ bars,\ V_2 = 4,57.10^4\ m^3\}$ et $\{P_1 = 500\ bars,\ V_1\}$.
1) Exprimer les coefficients thermoélastiques α et χ_T (➜ Cf Cours **T1**). Comparer avec les expressions obtenues pour le gaz parfait.
2) Un tel gaz est appelé gaz de Joule car il vérifie la première loi de Joule. La rappeler.
3) Ce gaz est situé dans un cylindre rigide adiabatique à deux compartiments inégaux, dont il occupe le compartiment (1), le vide régnant dans le compartiment (2). On perce un trou entre les deux compartiments. Le gaz passe des conditions initiales $\{P_1,\ V_1,\ T_1\}$ aux conditions finales $\{P_2,\ V_2,\ T_2\}$ (avec V_2 le volume total (1)+(2)). → q**(a)** Calculer la variation d'énergie interne ; **(b)** en déduire T_2 littéralement puis V_1 numériquement.

Rép : **1)** $\alpha = \frac{1}{T}$ et $\chi_T = \frac{1}{V}\frac{V-b}{P}$; **3)** $V_1 = 4,52.10^{-5}\ m^3$.

Ex-T3.9 **Transformations adiabatiques**
Une mole de GP de capacité thermique molaire à volume constant $C_m = \frac{5}{2}R$ est enfermé dans un cylindre vertical calorifugé fermé par un piston mobile calorifugé de section $S = 0,01\ m^2$ en contact avec une atmosphère extérieure à la pression constante $P_0 = 1\ bar$.
1) On pose sur le piston une masse $M = 102\ kg$ et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression P_1 et la température T_1 lorsqu'on a atteint le nouvel équilibre (état 1).
2) À partir de l'état 1, on enlève la masse M et on laisse le système évoluer. Déterminer la pression P_2 et la température T_2 lorsqu'on a atteint le nouvel état d'équilibre (état 2).

Rép : **1)** $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$; $T_1 = \frac{9}{7}T_0$; **2)** $P_2 = P_0$ et $T_2 = \frac{54}{49}T_0$

■ Calorimétrie

T3

Ex-T3.10 **Calorimétrie pratique**
On veut remplir une baignoire de 100 litres d'eau à 32°C. On dispose pour cela de deux sources, l'une d'eau froide à 18°C, l'autre d'eau chaude à 60°C.
Si on néglige la capacité thermique de la baignoire et les diverses pertes thermiques, quel volume doit-on prélever à chacune des deux sources ?
Donnée : la masse volumique de l'eau est censée être connue...☺

Rép : $V_{\text{eau chaude}} = 33,3\ L$

Ex-T3.11 **Échanges thermiques dans un calorimètre**
Un calorimètre de capacité calorifique $C_{cal} = 209\,J.K^{-1}$ contient une masse d'eau $m = 300\,g$ à la temérature $\theta = 18°C$ en équilibre thermique avec le vase intérieur. On introduit alors les masses : **(1)** $m_1 = 50\,g$ de cuivre à $\theta_1 = 30°C$, **(2)** $m_2 = 30\,g$ de plomb à $\theta_1 = 80°C$ et **(3)** $m_3 = 80\,g$ de fer à $\theta_1 = 50°C$.

→ Quelle est la température finale θ_f d'équilibre (la donner en degrés Celsius et en degré Kelvin) ?

Données : les capacités thermiques massiques sont : $c_{\text{Pb}} = 129,5\,J.K^{-1}.kg^{-1}$; $c_{\text{Fe}} = 452\,J.K^{-1}.kg^{-1}$; $c_{\text{Cu}} = 385\,J.K^{-1}.kg^{-1}$; $c_{\text{eau}} = 4\,185\,J.K^{-1}.kg^{-1}$.

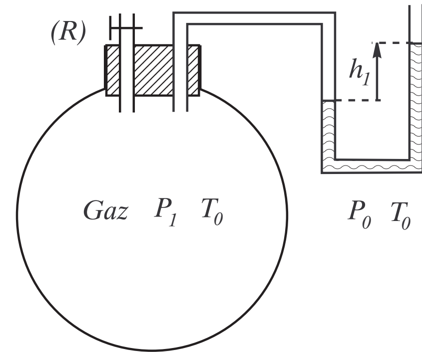
Rép : $\theta_f = 19°C$, $T_F = 292\ K$

■ Mécanique et thermodynamique

T3

Ex-T3.12 Expérience de Clément-Desormes : détermination expérimentale de γ (*)

On considère un ballon rempli d'un gaz parfait à un pression légèrement supérieure à la pression atmosphèrique P_0 : le liquide manométrique dans le tube en U présente une dénivellation h_1.
On ouvre le robinet pendant une durée brève, la dénivellation du liquide devenant nulle.
Le robinet fermé, on attend que s'établisse l'équilibre thermique : celui-ci correspond à une dénivellation h_2 du liquide.
→ Montrer que : $\gamma = \dfrac{h_1}{h_1 - h_2}$



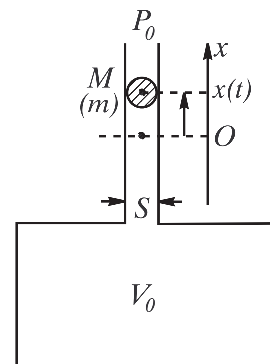
Conseil : raisonner sur les n moles restant dans le ballon après la fuite. Lors de la fuite, ces n moles subissent une détente rapide qui pourra être considérée comme adiabatique. De plus comme $P_1 \cong P_0$, on pourra la considérer pratiquement quasi-statique et mécaniquement réversible.

Ex-T3.13 Méthode de Rückhardt

Soit un gaz parfait occupant un volume V_0 (de l'ordre de 10 L) d'un récipient surmonté d'un tube de verre (d'une longueur de 50 cm environ) et de section *faible* S.
Considérons une bille d'acier, de masse m, susceptible de glisser le long du tube de verre.
Cette bille se trouve en équilibre mécanique en un point O.

1) Quelle est la pression P'_0 du gaz à l'intérieur du récipient (en notant P_0 la pression atmosphérique et g l'intensité du champ de pesanteur) ?

2) On écarte la bille de x_0, à partir de O, à l'instant $t = 0$, et on la lache sans lui communiquer de vitesse initiale. x_0 est suffisamment faible pour avoir $x_0 S \ll V_0$.

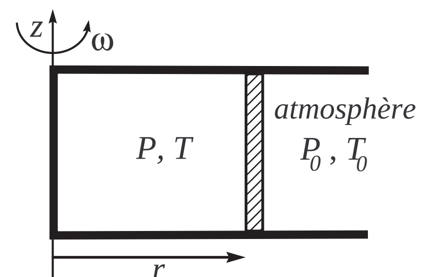


→ En négligeant les frottements ('fluides' comme 'solide'), établir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$. On supposera que la transformation du gaz est adiabatique quasi-statique.
→ Indiquer la période T des oscillations et en déduire l'expression de γ en fonction des paramètres expérimentaux.
→ Exprimer x en fonction de t.

Rép : **1)** $P'_0 = P_0 + \frac{mg}{S}$; **2)** Justifier que $PV^\gamma = \text{Cte}$, effectuer la différentielle logarithmique de cette relation et en déduire que $\mathrm{d}P \simeq -\frac{\gamma P'_0 S}{V_0} x(t)$. L'application du PDF à la bille, après y avoir fait apparaître $\mathrm{d}P$, conduit à $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{\gamma P'_0 S^2}}$

Ex-T3.14 Piston en rotation autour d'un axe

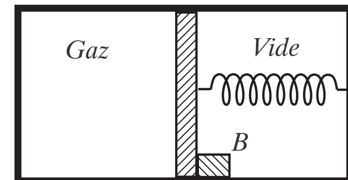
Un cylindre calorifugé est mis en rotation de manière progressive à partir de la vitesse nulle jusqu'à la vitesse angulaire ω (qui restera constante) autour d'un axe vertical.
Un piston mobile de masse m et de section S glisse sans frottement à l'intérieur du cylindre ; il emprisonne une quantité d'air initialement caractérisée par les conditions $\{P_0, T_0, V_0\}$. L'air sera considéré comme un gaz parfait.



1) Déterminer la pression finale P_f du gaz si l'on admet qu'il a subi une transformation quasi-statique réversible lorsque le piston s'est déplacé de sa position initiale caractérisée par r_0 jusqu'à sa position d'équilibre caractérisée par r_f.
2) En déduire la vitesse angulaire ω et la température finale T_f du gaz.
3) Données : $P_0 = 1\,013\ hPa$; $S = 10\ cm^2$; $r_0 = 10\ cm$; $r_f = 12\ cm$; $m = 1\ kg$; $T_0 = 293\ K$ et $\gamma = 1,4$. → Calculer numériquement P_f, T_f et ω.

Rép : **1)** $P_f = P_0(\frac{r_0}{r_f})^\gamma$; **2)** $T_f = T_0(\frac{r_0}{r_f})^{\gamma-1}$; **3)** $P_f = 0,785\ bar$; $T_f = 272\ K$ et $\omega = 13,8\ rad.s^{-1}$.

Ex-T3.15 cas d'une Force extérieure conservative (*)



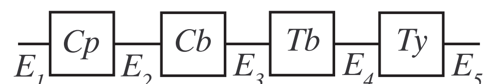
On considère un piston calorifugé mobile dans un cylindre calorifugé horizontal de section constante $S = 500\ cm^2$.
Le compartiment de gauche contient $n = 0,01\ mole$ d'un GP de coefficient $\gamma = 1,40 = \dfrac{7}{5}$ et le compartiment de droite est soumis à un vide poussé. Le piston est relié par un ressort de raideur $k = 10^{44}\ N.m^{-1}$.
1) Initialement, le piston est coincé par une butée B, le ressort n'est pas tendu, la pression du gaz vaut $P_0 = 0,241\ bar$ et sa température $T_0 = 290\ K$. Calculer le volume V_0 occupé initialement par le gaz.
2) On supprime la butée B. Le système évolue vers un nouvel état d'équilibre. On cherche à déterminer l'allongement final du ressort, x_F, le volume final du gaz, V_F, sa pression finale, P_F, sa température finale, T_F, et le travail W qu'il a reçu.
2.a) En appliquant le PFD au piston au repos dans l'état final, donner le relation entre P_F, S, k et x_F.
2.b) Quelle est l'expression de l'équation d'état du GP dans l'état final ?
2.c) Appliquer le Premier Principe au GP (en fait {GP+piston}) et en déduire une relation entre T_F, T_0, n, γ, k et x_F.
2.d) Quelle est la relation liant le volume final V_F avec V_0, x_F et S ?
2.e) Déduire des quatre équations précédentes que la pression P_F est solution de l'équation :
$P_F^2 + \frac{5}{6}\dfrac{kV_0}{S^2}P_F - \dfrac{5}{6}nRT_0\dfrac{k}{S^2} = 0$
2.f) En déduire les valeurs des grandeurs recherchées.

Rép : **1)** $V_0 = 1\ L$; **2)** $P_F \simeq 7\,450\ pa$; $V_F = 2,86\ L$; $T_F = 256\ K$; $x_F = 3,72\ cm$; $W_{\text{forces pressantes}} = 0\ J$; $W_{\text{ressort}} = -\Delta\mathcal{E}_{\text{p,él}} \simeq -7\ J$

■ Systèmes ouverts

T3

Ex-T3.16 Turboréacteur (**)



Un turboréacteur destiné à la propulsion d'avions est schématisé ci-contre :
- l'air est comprimé dans le compresseur (Cp) calorifugé où il évolue de l'état E_1 à l'état E_2 ;
- puis l'air traverse une chambre de combustion (Cb) où il subit un réchauffement isobare de l'état E_2 à l'état E_3 ;
- l'air se détend ensuite dans une turbine (Tb) calorifugée où il évolue de l'état E_3 à l'état E_4 ;
- enfin l'air traverse une tuyère (Ty), conduite de section variable où il acquiert une vitesse importante c_5 et évolue de l'état E_4 à l'état E_5.
Les données concernant les différents états sont résumés dans le tableau ci-contre.

État	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
P en $bars$	1,0	5,0	5,0	2,5	1,0
T en K	288	$T_2 = ?$	1 123	955	735

L'installation fonctionne en régime stationnaire. On néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur dans toute l'installation. On néglige l'énergie cinétique de l'air partout sauf dans l'état E_5 à la sortie de la tuyère, où la vitesse de l'air vaut c_5.

L'air est assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante $c_P = 1,0\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$. On rappelle que $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$.

1) Soit (Σ) le système ouvert constitué par le gaz contenu dans la tuyère (Ty) et (Σ^*) le système fermé associé constitué à l'instant t par (Σ) et par la masse dm d'air qui va entrer dans la tuyère entre les instants t et $t + dt$, et constitué à l'instant $t + dt$ par (Σ) et par la masse dm d'air qui est sortie de la tuyère entre les instants t et $t + dt$.

En appliquant le premier principe à (Σ^*), calculer la vitesse c_5 de l'air à la sortie de la tuyère.

2) En raisonnant de manière analogue, exprimer les travaux w_{Cp} et w_{Tu} correspondant au transfert d'un kilogramme d'air respectivement dans le compresseur et dans la turbine en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4. Sachant que le travail récupéré dans la turbine sert exactement à entraîner le compresseur, calculer T_2.

3) En raisonnant comme à la question 1), calculer le transfert thermique q correspondant au transit d'un kilogramme d'air dans la chambre de combustion. En déduire le rendement thermodynamique du turboréacteur défini par : $r = \dfrac{1}{2}\dfrac{c_5^2}{q}$

Rép : **1)** $c_5 = \sqrt{2c_P(T_4 - T_5)} = 6,6.10^2\ m.s^{-1}$; **2)** $w_{\mathsf{Cp}} = c_P(T_2 - T_1)$; $w_{\mathsf{Tu}} = c_P(T_4 - T_3)$; $T_2 = 456\ K$; **3)** $q = c_P(T_3 - T_2) = 667\ kJ.kg^{-1}$; $r = 33\%$.

Ex-T3.17 Géométrie d'une Tuyère (**)

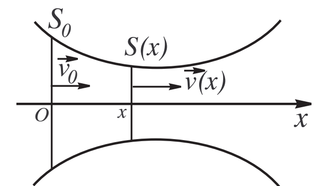
Soit une tuyère avec un écoulement permanent adiabatique d'un gaz parfait :

1) Montrer que : $v^2(x) - v_0^2 = \dfrac{2\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{R}{M}(T_0 - T(x))$ ①

2) Montrer que : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{(\gamma-1)T}{Sv}\dfrac{\mathrm{d}(Sv)}{\mathrm{d}x}$ ②

3) Déduire des questions précédentes que :

$$\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ (vitesse du son).}$$



Rq : pour un écoulement subsonique ($v < c$), il faut que la tuyère soit convergente si on veut que la vitesse augmente avec x.

Indications : **1)** Se ramener à un système fermé pour établir le 1P Industriel (➜ Cf Ex-T3.XX) ; **2)** Bien que la vitesse d'écoulement soit élevée en sortie (c'est le rôle d'une tuyère), on peut faire l'hypothèse que l'écoulement adiabatique se ramène à la transformation adiabatique QS* d'une masse dm entre l'état $\{V_0, T_0\}$ et l'état $\{V(x), T(x)\}$. Le gaz étant supposé parfait, on peut alors appliquer la loi de Laplace $TV^{\gamma-1} = \mathsf{Cte}$, avec $V(x) = Sv(x)\mathrm{d}t$ pour la masse dm de gaz sortant de la tuyère entre t et $t + \mathrm{d}t$; **3)** Dériver ① par rapport à x et y « injecter » ②.

" Après chaque cycle, qu'il soit ou non idéal, l'entropie, fonction d'état du système, reprend sa valeur initiale. Mais c'est seulement dans le cas d'un cycle idéal que la variation d'entropie dS, pendant un temps très court dt, peut être définie par une relation d'équivalence entre cette variation et les échanges avec le milieu qui, pendant le temps dt, la provoquent. Et c'est dans ce cas seulement qu'une inversion du sens des échanges entre système et milieu se traduit par une inversion du signe de la variation de l'entropie. Dans le cas de cycle non idéaux, seule une partie de dS, que nous appellerons d_eS, possède ces propriétés ; d_eS décrit le "flux" d'entropie entre milieu et système, l'ensemble des transformations du système déterminées par les flux d'échange avec le milieu, et qui peuvent être annulés par une inversion de ces flux . Mais les échanges avec le milieu provoquent d'autres transformations à l'intérieur du système, qui, elles, sont *irréversibles* : ce sont celles qui entraînent une diminution de rendement dans le cycle de Carnot, c'est-à-dire des flux qu'une inversion de sens de fonctionnement du cycle ne peut ramener à la source chaude. Le terme d_iS, qui décrit ces transformations, est toujours positif ou nul ; une inversion des échanges avec le milieu ne change pas son signe. La variation d'entropie dS est donc la somme des deux termes, d_eS et d_iS, aux propriétés différentes ; le premier est indépendant de la direction du temps puisque son signe dépend seulement du sens des échanges avec le milieu ; le second ne peut que faire croître l'entropie au cours du temps, ou la laisser constante. (...) Dans un système isolé, le flux d'entropie est, par définition, nul. Seul subsiste le terme de production, et l'entropie du système ne peut dès lors qu'augmenter ou rester constante.

(...) Le caractère unique de l'énoncé du second principe tient à ce que le terme de production est *toujours positif*. La production d'entropie traduit une évolution irréversible du système.

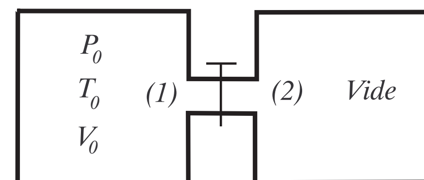
(...) la croissance de l'entropie traduit une *évolution spontanée* du système. L'entropie devient un "indicateur d'évolution", et traduit l'existence en physique d'une "flèche du temps" : pour tout système isolé, le futur est la direction dans laquelle l'entropie augmente."

Ilya Prigogine & Isabelle Stengers – La Nouvelle Alliance (1979)

■ Détentes

T4

Ex-T4.1 Les deux réservoirs ont le même volume V_0 et l'ensemble est adiabatique. On entrouvre le robinet : le gaz parfait restant dans le compartiment (1) a subit une détente quasi-statique.



Déterminer l'état final et décrire le chemin suivi pendant la transformation, dans les deux cas suivants :

(a) les deux réservoirs sont thermiquement isolés l'un de l'autre (ce qui revient à négliger le transfert thermique entre les gaz se trouvant dans (1) et (2) à l'état final) ;

(b) Les deux réservoirs sont en contact thermique.

Rép : (a) $n_1 = n2^{-\frac{1}{\gamma}}$; $T_2 = \dfrac{T_0}{2(1-2^{-\frac{1}{\gamma}})}$

Ex-T4.2 **Détente d'un gaz réel donné par $S(U,V)$**

Dans le domaine de températures et de pressions considéré, une mole de gaz monoatomique de sphères dures est décrit par la fonction caractéristique :

$$S_m(U_m, V_m) = \frac{S}{n} = S_{m0} + \frac{3}{2}R\ln\left(\frac{U_m}{U_{m0}}\right) + R\ln\left(\frac{V_m - b}{V_{m0} - b}\right)$$

où S_{m0}, U_{m0} et V_{m0} désignent respectivement l'entropie, l'énergie interne et le volume molaires dans un état de référence, et où $b = 2.10^{-5}\ m^3.mol^{-1}$ et $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

1) Une mole de ce gaz est initialement en équilibre dans un cylindre parfaitement calorifugé de volume V_{Im}, à la température $T_I = 300\ K$. On réalise une détente réversible faisant passer le volume du cylindre de $V_{Im} = 10\,b$ à $V_{Fm} = 20\,b$.

→ Déterminer la pression initiale, la température finale et le travail W_m reçu par le gaz.

2) On réalise une détente de Joule-Gay Lussac d'une mole de ce gaz : initialement le gaz occupe un volume $V_{Im} = 10\,b$ et sa température vaut $T_I = 300\ K$. Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume $V_{Fm} = 20\,b$.

→ Déterminer la température finale, la pression finale et l'entropie molaire créée. Commenter.

Rép : 1) $P_I = 138,6\ bars$; $T_F = T_I\left(\dfrac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b}\right)^{\frac{3}{2}} = 182\ K$; $W_m = -1,47\ kJ.mol^{-1}$;

2) ${}^cS_m = R\ln\dfrac{V_{mF} - b}{V_{mI} - b} = 6,21\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Ex-T4.3 **Détente de Joule-Gay Lussac de la vapeur d'eau**
On réalise une détente de Joule-Gay Lussac dans un récipient calorifugé constitué de deux compartiments de volumess respectifs V_1 et $V_2 - V_1$ reliés par un robinet (R).
Initialement, une mole de vapeur d'eau est contenue dans le récipient de gauche dans l'état E_1 $\{P_1 = 100\ bars,\ T_1 = 773\ K,\ V_1 = 5,90.10^{-4}\ m^3,\ U_1 = 54,78\ kJ,\ S_1 = 6,594\ kJ.K^{-1}\}$ et le compartiment de droite est vide.
On ouvre le robinet (R), la vapeur d'eau occupe le volume total V_2 ; on mesure alors $T_2 = 753\ K$.
1) La vapeur d'eau est-elle assimilable à un GP au cours de la détente ?
Déterminer les caractéristiques $\{P_2,\ T_2,\ V_2,\ U_2,\ S_2\}$ de l'état final en utilisant l'extrait des tables de la vapeur d'eau (grandeurs molaires) à la température $T_2 = 753\ K$:

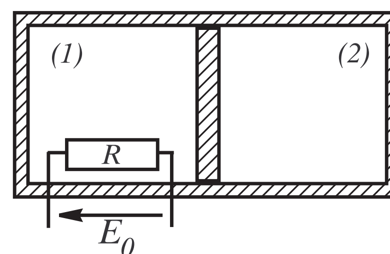
P en $bars$	40	46	52	58	64	70
V_m en $m^3.mol^{-1}$	$1,51.10^{-3}$	$1,31.10^{-3}$	$1,15.10^{-3}$	$1,02.10^{-3}$	$9,23.10^{-4}$	$8,39.10^{-4}$
U_m en $kJ.mol^{-1}$	55,14	55,04	54,96	54,80	54,70	54,59
S_m en $kJ.K^{-1}.mol^{-1}$	6,963	6,890	6,825	6,766	6,712	6,662

2) Calculer l'entropie créée au cours de l'évolution et commenter.
Rép : **1)** $P_2 \simeq 59,2bars$; $V_2 \simeq 1,001.10^{-3}\ m^3$; $S_2 \simeq 6,755\ kJ.K^{-1}.mol^{-1}$;
2) $\Delta S = {}^{c}S \simeq 161\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

■ Bilans entropiques

T4

Ex-T4.4



Les deux compartiments contiennent le même gaz parfait initialement dans le même état $\{P_0, T_0, V_0\}$. Les parois sont calorifugées ainsi que le piston. Ce dernier se déplace sans frottement dans le cylindre.
On fait passer un courant I dans la résistance R de telle sorte que la transformation du gaz puisse être considérée comme quasi-statique, et jusqu'à ce que la pression devienne P_f.
1) Déterminer l'état thermodynamique du gaz dans chaque compartiment.
2) Donner l'expression de l'énergie fournie par le générateur qui alimente la résistance.
3) Calculer la variation d'entropie du système complet (résistance incluse).
Rép : **1)** $V_2 = V_0\left(\dfrac{P_0}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$; $T_2 = T_0\left(\dfrac{P_f}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$; $T_1 = T_0\left(2\dfrac{P_f}{P_0} - \left(\dfrac{P_f}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)$;
2) $W_{\text{élec}} = nC_{Vm}(T_1 + T_2 - 2T_0)$; **3)** $\Delta S = nC_{Vm}\ln\dfrac{T_1}{T_0} + nR\ln\dfrac{V_1}{V_0}$.

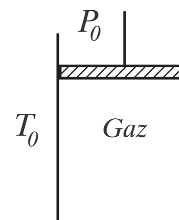
Ex-T4.5 **Entropie de mélange**
Considérons un cylindre parfaitement isolé, séparé en deux compartiments de volume V_0, par une paroi escamotable.
Initialement, chaque compartiment contient un GP à la même température T_0. Supposons que l'un renferme de l'hélium (n_1 moles, $C_{Vm1} = \frac{3}{2}R$) et l'autre du dihydrogène (n_2 moles, $C_{Vm2} = \frac{5}{2}R$).
Supprimons la paroi escamotable ; on atteint un nouvel état d'équilibre caractérisé par : $V_F = 2V_0$, P_F et T_F, les deux gaz, par diffusion, constituant un GP unique.
1) Calculer P_F et T_F.
2) Effectuer un bilan entropique pour cette transformation.
Rép : **1)** $T_F = T_0$; $P_F = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$; **2)** $\Delta S = (n_1 + n_2)R\ln 2$.

Ex-T4.6 **Système Glace/Eau liquide dans un calorimètre**
Dans un vase parfaitement calorifugé de capacité thermique $C = 120\ J.K^{-1}$, on verse $m_1 = 200\ g$ d'eau de capacité thermique massique $c_e = 4\,185\ J.K^{-1}.kg^{-1}$. la température d'équilibre s'établit à $t_1 = 18°C$.

On y introduit alors un cube de glace de masse $m_2 = 72\ g$ pris initialement à la température $t_2 = -10°C$ et on agite jusqu'à obtention d'un nouvel équilibre thermique.
La capacité thermique massique de la glace est $c_g = 2\,090\ J.K^{-1}.kg^{-1}$; et la chaleur latente de fusion est , à $0°C$ et sous la pression atmosphérique normale : $L_f = 333\ kJ.kg^{-1}$.
1) Déterminer, lorsque l'équilibre est atteint, la température finale T_0 et faire un bilan *glace/eau*.
2) Calculer (littéralement et numériquement) la variation d'entropie, pour le système { eau liquide + glace + calorimètre }, consécutive à l'introduction de la glace.

Rép : 2) $\Delta S = (C + m_1 c_e) \ln \frac{T_0}{T_1} + m_2 c_g \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{x L_f}{T_0}$.

Ex-T4.7 Deux transformations monothermes

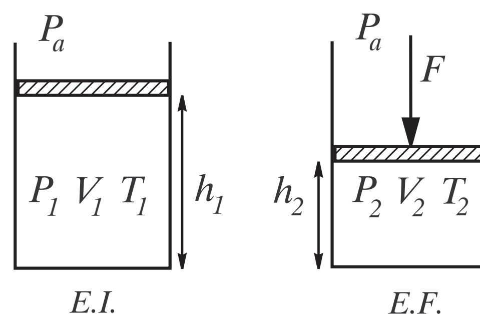


Un gaz parfait se trouve dans un cylindre à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable.
On note P_0 et T_0 la pression et la température de l'atmosphère extérieure.
Initialement, le gaz, à la température $T_1 = T_0$, occupe un volume V_1.
Données : $P_0 = 1\ bar$; $V_1 = 5.10^{-3} m^3$; $R = 8,32\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; $T_0 = 293\ K$ et $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$ (supposé indépendant de la température, C_P et C_V étant les capacités thermiques isobare et isochore).
1) La paroi du cylindre est conductrice de la chaleur (paroi *diathermane*).
En appuyant sur le piston, un opérateur augmente très lentement la pression jusqu'à $P_2 = 10\ bars$.
Dans l'état d'équilibre final, le gaz occupe un volume V_2 à la température T_2.
1.a) Calculer V_2 et T_2.
1.b) Exprimer littéralement puis calculer numériquement : la variation d'énergie interne ΔU, la variation d'enthalpie ΔH, le transfert thermique chaleur Q et le travail W échangés par le système gazeux avec le milieu extérieur.
1.c) Quelle est la variation d'entropie ΔS_g du gaz au cours de l'opération ?
1.d) On pose $F \equiv U - TS$ et $G \equiv H - TS$.
Donner la relation entre la variation d'enthalpie libre ΔG et la variation d'énergie libre ΔF du gaz parfait.
2) La paroi du cylindre est toujours diathermane, mais l'opérateur, à l'équilibre initial (P_1, V_1, T_1), place sur le piston (de section s) une masse $M = \frac{(P_2 - P_1)\,s}{g}$ (où g est l'intensité du champ de pesanteur).
2.a) Reprendre les calculs de la question 1.a), sachant que $P_2 = 10\ bars$.
2.b) On note ΔS_a la variation d'entropie de l'atmosphère extérieure au cours de l'opération.
→ Calculer ΔS_a.
Que représente $\Delta S_g + \Delta S_a$? Commenter le signe de cette expression.

Rép : **1.a)** $V_2 = 5.10^{-4}\ m^3$; **1.b)** $Q = -1\,151\ J$; **1.c)** $\Delta S = -3,93\ J.K^{-1}$; **2.b)** $\Delta S_a = 15,36\ J.K^{-1}$.

Ex-T4.8 Compression irréversible monotherme

Un cylindre vertical de section S est fermé par un piston horizontal de masse négligeable, mobile sans frottement. Une masse m d'air (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M) est enfermée dans le cylindre, à la température initiale T_1 et la pression initiale $P_1 = P_a$ (P_a note la pression ambiante supposée constante).
R est la constante des gaz parfaits et γ note le rapport des capacités thermiques à pression et à volume constant.



Données : $S = 100\ cm^2$; $m = 7,25\ g$; $M = 29\ g.mol^{-1}$; $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; $T_1 = 300\ K$; $P_a = 1\ bar$; $\gamma = 1,4$.

1) Calculer V_1, le volume initial de l'air, et la hauteur h_1 (distance entre le piston et le fond du cylindre).
2) Exprimer la variation élémentaire d'entropie d'une masse m de gaz parfait, au cours d'une transormation quasi-satique, en fonction de m, R, M, γ, $\frac{\mathrm{d}T}{T}$ et $\frac{\mathrm{d}V}{V}$.
3) Les parois du cylindre ainsi que le piston sont *diathermanes*, ce qui signifie qu'ils autorisent les transferts thermiques (ont dit aussi qu'il sont « perméables à la chaleur »).
L'ensemble du dispositif se trouve dans une atmosphère maintenue à la température $T_a = T_1 = 300\ K$.
On applique *brutalement* la force $F = 1\,000\ N$ sur le piston.
On appelle P_2 et V_2 la pression et le volume de l'air lorsque celui-ci atteint l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.
3.a) Calculer le taux de compression $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ et la hauteur h_2 finale.
3.b) Calculer le travail W reçu par l'air au cours de l'évolution 1→ 2.
3.c) Calculer la variation d'entropie ΔS_{air} de l'air pour cette évolution. Le signe de cette variation est-il 'choquant' ?
3.d) Calculer, pour cette même évolution, la variation d'entropie ΔS_{ext} du milieu extérieur.
En déduire la variation d'entropie de l''univers' ({air+extérieur}) : $\Delta S_\infty = \Delta S_{\mathsf{air}} + \Delta S_{\mathsf{ext}}$. Justifier son signe.

Rép : **1)** $h_1 = 62,4\ cm$; **2)** $\mathrm{d}S = \frac{mR}{M}\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}V}{V}\right)$; **3.a)** $h_2 = 31,2\ cm$; **3.b)** $W_{12} = 624\ J$; **3.c)** $\Delta S_{\mathsf{air}} = -1,44\ J.K^{-1}$; **3.d)** $\Delta S_\infty = {}^{\mathsf{P}}S_\infty = 0,64\ J.K^{-1}$.

Ex-T4.9 Évolution adiabatique irréversible de vapeur d'eau (*)

Dans une machine à vapeur, au cours de la phase motrice, une mole de vapeur d'eau se détend dans un cylindre calorifugé et fermé de l'état A $\{P_A = 40\ bars,\ T_A = 773\ K\}$ jusqu'à l'état B $\{P_B = 1\ bar,\ T_B = 373\ K\}$.
On extrait des tables thermodynamiques les valeurs suivantes pour le volume molaire V_m, l'énergie interne molaire U_m et l'entropie molaire S_m :

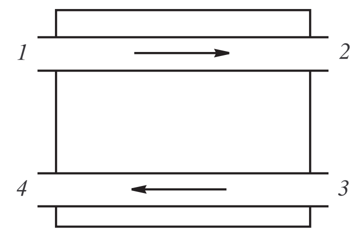
	V_m en $m^3.mol^{-1}$	U_m en $kJ.mol^{-1}$	S_m en $kJ.K^{-1}.mol^{-1}$
A	$1,556.10^{-3}$	55,77	0,1275
B	$3,060.10^{-2}$	45,08	0,1325

1) Calculer le travail W reçu par la vapeur d'eau au cours de l'évolution $A \to B$. L'évolution est-elle réversible ?
On modélise l'évolution $A \to B$ (supposée **QS***) par une évolution polytropique d'indice k ($PV^k = cste$).
→ Déterminer k et en déduire une estimation W' du travail W. Commenter.
2) On réalise une détente réversible entre les mêmes états A et B, représentés par une évolution rectiligne dans le diagramme entropique (T, S).
Déterminer le transfert thermique Q^* et le travail W^* au cours de cette détente. Comparer W^* et l'estimation polytropique W' obtenue en **1)**. Commenter.

Rép : **1)** $W_m = -10,69\ jK.mol^{-1}$; $k = 1,24$; $W'_m = -13,27\ kJ.mol^{-1}$; **2)** $Q^*_m = 2,87\ kJ.mol^{-1}$; $W^*_m = -13,56\ kJ.mol^{-1}$.

Ex-T4.10 Échangeur thermique

Dans cet exercice, on utilisera les grandeurs massiques : v, h, w, q, etc…
On considère l'échangeur thermique (ETh) représenté ci-contre. Il est constitué de deux circulations parallèles d'air : dans l'une l'air évolue de l'état E_1 à l'état E_2 et dans l'autre l'air évolue de l'état E_3 à l'état E_4.
Ces états sont caractérisés par la même pression $P = 1\ bar$ et des températures respectives T_1, T_2, T_3 et T_4 avec $T_3 \neq T_1$.
L'air est assimilé à un GP de coefficient $\gamma = 1,40$.



On donne : $r \equiv \frac{R}{M} = 287\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.
Alors l'équation d'état s'écrit : $P\,v = r\,T$.
L'échangeur thermique constitue un système ouvert (Σ) à deux entrées et sorties ; l'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique identique dans les deux circulations.
On néglige les variations d'énergie mécanique.
On suppose que l'échangeur thermique est parfaitement calorifugé et que son fonctionnement est réversible.
On associe au système ouvert (Σ) le système fermé (Σ^*) tel que :
- à l'instant t, (Σ^*) est constitué de (Σ) et des masses dm_1 et dm_3 qui vont entrer dans (Σ) par chacune des entrées pendant la durée dt ;
-à l'instant $t + dt$, (Σ^*) est constitué de (Σ) et des masses dm_2 et dm_4 qui sont sorties de (Σ) pendant la durée dt.

1) En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique au système (Σ^*), établir deux relations entre les températures T_1, T_2, T_3 et T_4.
2) En supposant les températures T_1 et T_3 connues, déterminer les températures T_2 et T_4. Commenter.
3) Dans un échangeur thermique réel, on a $T_1 = 350\ K$, $T_2 = 290\ K$, $T_3 = 280\ K$ et $T_4 = 340\ K$. Calculer l'entropie massique créée lors du transfert dans chacune des circulations et commenter.
4) En réalité l'échangeur thermique n'est pas parfaitement calorifugé, de telle sorte qu'il cède de la chaleur à l'atmosphère, considérée comme un thermostat dont la température est $T_0 = 293\ K$.
On a alors $T_1 = 350\ K$, $T_2 = 290\ K$, $T_3 = 280\ K$ et $T_4 = 330\ K$.
En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système (Σ^*), calculer le transfert thermique massique dans chacune des circulations et commenter. Calculer l'entropie massique créée correspondante et commenter.

Rép : **1)** $T_2 - T_1 = T_3 - T_4$ et $T_1T_3 = T_2T_4$; **2)** $T_3 = T_2$ et $T_4 = T_1$; **3)** $\Delta s = {}^{c}s = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2T_4}{T_1T_3} = 6,13\ J.K^{-1}.kg^{-1}$; **4)** $q = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}(T_2 + T_4 - T_1 - T_3) = -10,0\ kJ.kg^{-1}$.

" La *thermodynamique*, dont le nom associe les deux mots grecs *thermon* et *dynamis* (chaleur et puissance), est alors née du désir – et de la nécessité technique – d'analyser ce que Sadi CARNOT appela, en 1824, la "puissance motrice du feu" : il s'agissait de rechercher les conditions optimales dans lesquelles la chaleur fournie par une chaudière peut être transformée en travail mécanique par une machine thermique. Il est assez remarquable du point de vue épistémologique, que ces préoccupations essentiellement techniques, voire utilitaires, aient donné naissance à une théorie physique subtile, extrêmement élaborée, fondée sur des concepts particulièrement abstraits (restés longtemps mystérieux) tels que l'énergie et l'entropie."

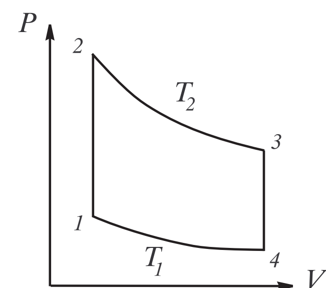
Bernard DIU – Les Atomes Existent-ils Vraiment ? – Odile Jacob (1997)

■ Machines thermiques

Ex-T5.1 Rendement du cycle Diesel

Établir le rendement du cycle Diesel affirmé en cours (T5-IV-5-c).

Ex-T5.2



Un fluide décrit le cycle réversible ci-contre dans le sens $(1, 2, 3, 4, 1)$ ou dans le sens $(1, 4, 3, 2, 1)$. Les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ sont des isochores et les transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ sont des isothermes. Les pression, volume, température sont notés respectivement P, V, T.
Toute grandeur affectée d'un indice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ se rapportera respectivement aux points 1,2,3,4 du diagramme.

1) Donner la signification de l'aire intérieure du cycle. Dans quel sens sera parcouru le cycle s'il est moteur ?
2) On note Q_{ij} et W_{ij} les chaleur et travail échangés par le fluide lors d'une transformation $i \rightarrow j$. Le fluide se comportant comme un gaz parfait, comparer :

$$Q_{23} \text{ et } W_{23},\ Q_{41} \text{ et } W_{41},\ W_{12} \text{ et } W_{34},\ Q_{12} \text{ et } Q_{34}.$$

3) On étudie le cycle dans le sens moteur. En raison de la technologie du moteur, la seule chaleur réellement dépensée est celle qu'on fournit au fluide sur l'isotherme T_2.
Écrire le rendement du moteur en fonction des Q_{ij}.
4) Le cœfficient isentropique du gaz parfait est $\gamma = \frac{7}{5}$. On donne par ailleurs : $V_4 = 2\,V_1$, $T_1 = 300\ K$, $T_2 = 400\ K$ et $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$. Le cycle est parcouru par une mole de gaz parfait.
→ Calculer Q_{12}, Q_{23} et Q_{41}.
5) Exprimer le rendement en fonction de T_1 et T_2 et le calculer numériquement.

Rép : **3)** $\rho = 1 + \dfrac{Q_{41}}{Q_{23}}$; **4)** $Q_{12} = 2\,075\ J = -Q_{34}$; $Q_{23} = 2\,2301\ J$; $Q_{41} = -1\,726\ J$.

Ex-T5.3 Moteur ditherme avec sources non idéales

Soit un moteur thermique réversible fonctionnant entre deux sources de même capacité $C = 4.10^6\ J.K^{-1}$ dont les température initiale sont respectivement $\theta_1 = 50°C$ et $\theta_2 = 100°C$.
Ces températures ne sont pas maintenues constantes.
1) Donner le schéma de principe de ce moteur, en indiquant clairement le sens des transferts thermique et de travail (on désigne par T la température de la source chaude et par T' la température de la source froide à un instant quelconque du fonctionnement du moteur).
2) Déterminer la température finale T_f des deux sources quand le moteur s'arrête de fonctionner.
3) Calculer le travail total fourni par ce moteur jusqu'à son arrêt. Vérifier et interpréter le signe.
4) Exprimer le rendement global ; le comparer avec le rendement théorique maximal que l'on pourrait obtenir si les températures initiales des deux sources T_1 et T_2 restaient constantes.

Rép : **2)** $T_f = 347\ K = 74°C$; **3)** $W = C(2\sqrt{T_1T_2} - T_1 - T_2) = -7,2.10^6\ J$;
4) $\rho = \dfrac{T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}}{T_2 - \sqrt{T_1T_2}} = 7\%$; $\rho_C = 13,4$.

Ex-T5.4 Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur dont le fonctionnement est supposé réversible échange de la chaleur avec deux sources : l'une est l'eau d'un lac dont la température est $T_0 = 280\ K$, l'autre est une masse $M = 1000\ kg$ thermiquement isolée dont la température initiale est $T_i = 293\ K$.
La capacité thermique massique à pression constante de l'eau est $c_P = 4,19.10^3\ J.kg^{-1}.K^{-1}$.
Calculer, lorsque la masse M d'eau a atteint la température finale $T_f = 333\ K$:
1) les transferts thermiques machine-eau et machine-eau du lac ;
2) le travail absorbé par la pompe ;
3) la variation d'entropie de la source froide ;
4) le cœfficient moyen de performance de la pompe à chaleur.

Rép : **1)** $Q_F = T_0 M c_P \ln\dfrac{T_f}{T_i} = 150,1.10^6\ J$; $Q_C = -167,6.10^2\ J$;
2) $W = Mc_P\left(T_f - T_i - T_0\ln\dfrac{T_f}{T_i}\right)$; **3)** $\Delta S_F = -Mc_P\ln\dfrac{T_f}{T_i} = -536,2.10^3\ J.K^{-1}$; **4)** $e_{\text{th}} = 9,6$.

Ex-T5.5 Pompe à chaleur (2, **)

Une pompe à chaleur fait décrire des cycles réversibles à un fluide qui est le siège de transferts thermiques avec l'air extérieur comme source froide et de température constante T_e et avec la pièce de capacité thermique C considérée comme une source chaude de température évolutive que l'on note T. Le moteur affecté à cette pompe lui fournit une puissance moyenne $\mathcal{P}$.
1) La pièce est supposée être parfaitement isolée thermiquement et initialement aérée donc à température de l'air extérieur ; on met en marche la pompe à chaleur à une date prise comme origine $t = 0$.
→ À l'aide des deux principes de la thermodynamique, exprimer la loi donnant l'évolution de la température de la pièce au cours du temps. Commenter.
AN : $T_e = 275\ K$, $\mathcal{P} = 300\ W$, $C = 4\,272\ kJ.K^{-1}$. Calculer la durée de fonctionnement de la pompe pour élever la température de la pièce de T_e à $T_i = 291\ K$.

2) En réalité, la machine n'est pas parfaite et les causes d'irréversibilité font que sont rendement comparé à une machine idéale est $r = 0,6$.
→ En déduire, dans le cadre de l'application numérique précédente, le pourcentage de gain entre le chauffage par pompe à chaleur et le chauffage direct par résistance chauffante de même puissance $\mathcal{P} = 300\ W$. Interpréter.
3) Il est évident que le modèle précédent a ses limites et que l'isolation thermique de la pièce ne peut pas être parfaite. On considère alors que la pièce est le siège d'un transfert thermique vers l'extérieur caractérisé par la puissance de fuite :

$$\mathcal{P}_f = \frac{\delta Q}{dt} = -a\,C\,(T - T_e),$$

où a est une constante positive qui caractérise la déperdition.
La température de la pièce étant $T_i = 291\ K$ et la pompe étant arrêtée, on constate que la température baisse de $0,4\ K$ en une heure.
→ En déduire la valeur numérique de a.
4) Un thermostat est chargé de la régulation de l'installation : il déclenche la mise en marche de la pompe lorsque la température de la pièce est $T_i' = T_i - 0,2$ et stoppe le fonctionnement lorsque celle-ci est remontée à T_i.
→ Déterminer le temps de fonctionnement de la pompe (en tenant compte de son rendement réel) lors de chaque échauffement.
En déduire la consommation journalière en kWh pour l'entretien de la température.

Rép : **1)** $C(T - T_e) - CT_e \ln \frac{T}{T_e} = \mathcal{P}.t$; $t = 1\,h\ 46\,min\ 22\,s$; **3)** $a = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{T_i - T_e}{T - T_e}\right) = 7,03.10^{-6}\ s^{-1}$; **4)** $W_p \sim 1,5\ kW.h$

Ex-T5.6 Turbomoteur

Un turbomoteur est constitué d'un compresseur, d'une chambre de combustion, d'une turbine à gaz et d'un échangeur thermique.
Dans l'état initial A, l'air considéré comme un gaz parfait est pris sous la température $T_0 = 290\ K$ et à la pression $P_0 = 1\ bar$ ($M = 29\ g.mol^{-1}$; $\gamma = 1,4$).
On fait subir à une masse $m = 1\ kg$ un cycle dont on suppose toutes les transformations réversibles et qui se compose de différentes étapes :
- L'air est initialement comprimé isentropiquement de A à B où sa pression est P_1. On note le taux de compression : $b = \frac{P_1}{P_0} = 5$.
- Le carburant est alors injecté dans l'air comprimé et la combustion se fait à pression constante dans la chambre de combustion ; le carburant introduit ne modifie pas sensiblement le nombre de moles du fluide qui décrit le cycle. $B \to C$ est une détente isobare.
- Les gaz à température élevée pénètrent dans la turbine où ils subissent une détente isentropique jusqu'à un état D caractérisé par P_0.
- Enfin, ils sont soumis à un refroidissement isobare réversible dans un échangeur thermique jusqu'à retrouver leurs conditions physiques initiales.

1) Représenter les évolutions du gaz dans le diagramme de Clapeyron (P, V) et le diagramme (T, S). Justifier l'allure des portions de courbes introduites.
2) On donne $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$. Définir et déterminer le rendement de ce cycle en fonction de b et de γ.
3) Calculer la température maximale atteinte par les gaz de combustion sachant que $m_1 = 50\ g$ de carburant ont été injectés dans l'air et que le pouvoir calorifique de ce carburant est $q = 50\,000 kJ.kg^{-1}$.

Rép : **2)** $\rho = 1 - b^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0,37$; **3)** $T_C \simeq 2\,951\ K$



Ex-T5.7 **Cycle moteur**

On fait décrire à une masse m d'air un cycle moteur composé des transformations réversibles suivantes :

- $A \to B$: compression isotherme, le fluide étant au contact de la source froide à la température T_2, le taux de compression étant $a = \frac{V_A}{V_B} = 8$.
- $B \to C$: compression isochore, le taux de compression étant $b = \frac{P_C}{P_B} = 3$.
- $C \to D$: détente isotherme, le fluide étant au contact de la source chaude à la température T_1, de façon que $V_D = V_A$.
- $D \to A$: détente isochore.

L'air se comporte comme un GP dont le rapport est $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$.

1) Représenter le diagramme (P, V) de ce cycle moteur.

2) Déterminer littéralement les expressions des transferts thermiques lors de ce cycle ainsi que le travail global exécuté par le fluide.

3) Définir le rendement du cycle et l'exprimer en fonction de a, b et γ. Calculer numériquement ce rendement.

4) Montrer que le rendement du cycle de Carnot est toujours supérieur à celui du cycle précédent, T_A étant la température de la source froide et T_C celle de la source chaude.

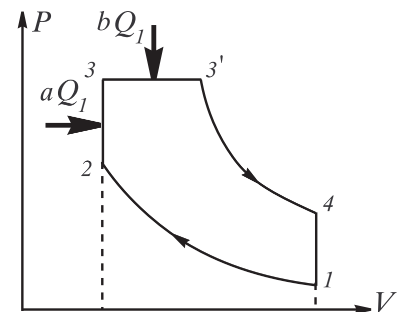
Ex-T5.8 **Cycle Diesel amélioré**(d'après ENSAM)

On considère un cycle théorique représentant l'évolution d'une masse de fluide entre la fermeture et l'ouverture des soupapes dans un diagramme (P, V).

Les évolutions $1 \to 2$ et $3' \to 4$ sont des adiabatiques réversibles.

L'apport de chaleur est fractionné en deux séquences : l'une à volume constant, l'autre à pression constante. $Q_1 = a\,Q_1 + b\,Q_1$, avec $a + b = 1$.

Le rejet de chaleur se fait exclusivement au cours de l'évolution $4 \to 1$.



1) Exprimer le rendement thermodynamique du cycle en fonction de T_1, T_2, T_3, $T_{3'}$, T_4 et γ.

2) On introduit les paramètres suivants : $\lambda = \frac{P_3}{P_2}$; $\tau = \frac{V_1}{V_2}$, $\alpha = \frac{T_3'}{T_1}$ et $\Delta = \frac{V_3'}{V_3}$ le taux (ou rapport) d'injection.

$\to$ Calculer littéralement les températures T_2, T_3, $T_{3'}$ et T_4 en fonction de T_1 et de paramètres adimensionnels à choisir parmi τ, γ, λ et Δ.

3) En déduire l'expression du rendement η du cycle ; $\eta = \eta(\tau, \gamma, \lambda, \Delta)$.

" La vaporisation , la sublimation et la fusion existent pour tous les corps purs, mais dans des conditions qui varient considérablement de l'un à l'autre. ce ne sont toutefois pas les seules transitions de phase. Certains corps purs peuvent se présenter sous deux ou plusieurs formes solides cristallines. On observe alors entre ces solides des *transitions de polymorphisme* : passage du même corps pur d'une configuration cristalline à une autre (transition solide-solide directe, sans détour par la phase liquide), avec équilibre entre elles dans un certain domaine. Par exemple, on connaît au moins deux variétés polymorphiques du soufre solide, que l'on désigne par soufre α (système cristallin orthorhombique) et soufre β (système monoclinique). Même situation pour le carbone, qui se présente soit sous forme de graphite, solide gris-noir laissant une trace sur le papier (cristallisé en lamelles dans lesquelles les atomes dessinent des hexagones), soit sous forme de diamant, le plus brillant, le plus pur, le plus limpide des minéraux (cristallisé dans le système cubique) ; nul ne me contredira si j'affirme que voilà deux apparences fort différentes du même corps pur ! Mêmes circonstances lorsqu'il s'agit de l'étain, dont les deux principales variétés polymorphiques sont l'étain blanc et l'étain gris. Cette dualité fut cause, durant la campagne de Russie de l'armée napoléonienne, d'un phénomène curieux et impressionnant connu sous le nom de "peste de l'étain". La vaisselle des soldats, les boutons de leur uniforme, étaient faits d'étain. Sous l'influence du froid rigoureux, ustensiles de vaisselle et boutons se mirent à tomber en poussière l'un après l'autre, comme victimes d'une épidémie.

Voici, en quelques mots, l'explication physique du phénomène. Deux variétés d'étain, donc. Aux températures ordinaires, seul l'étain gris est stable ; c'est avec lui, par conséquent, que l'on façonne les objets. À $13°C$, l'étain gris devrait se transformer en étain blanc, seule variété vraiment stable aux températures inférieures à $13°C$. Mais on observe dans ce cas un comportement particulier, assez courant dans les transitions de phases, tout spécialement dans les transitions de polymorphisme (solide-solide) comme celle que nous étudions : un *retard à la transition*. Cela signifie, en l'occurence, que l'étain gris peut perdurer lorsque la température s'établit au-dessous de $13°C$: l'état

véritablement stable au-dessous de $13°C$, qui est l'étain blanc, n'apparaît pas provisoirement et laisse encore place à l'étain gris. On appelle «état d'équilibre *métastable*» une phase telle que l'étain gris au-dessous de $13°C$; on l'observe seulement parce que l'état d'équilibre stable (étain blanc) ne se réalise pas. Rien de fâcheux n'arrive donc, dans nos hivers tempérés, aux ustensiles en étain. Mais des froids intenses – ils furent particulièrement intenses durant la retraite de Russie – peuvent faire basculer un objet vers l'étain blanc. Par suite de la différence de masse volumique (densité) entre les deux variétés, la forme de l'objet ne survit pas à la transformation, et il tombe en poussière. Mais il y a pire, bien pire ! Si un autre objet, resté à l'état d'étain gris, entre en contact ne serait-ce qu'avec un grain de poussière – un cristal – d'étain blanc, cela induit immédiatement sa transformation intégrale, et donc sa désintégration : l'état métastable passe aussitôt à l'état stable s'il est mis en présence du *germe* de ce dernier. Et ainsi, de proche en proche, se propage la peste de l'étain. . . "

Bernard Diu – Les Atomes Existent-ils Vraiment ? IX – Odile Jacob (1997)

Ex-T6.1 Apéritif

Un glaçon flotte à la surface de l'eau dans un verre. Que peut-on en conclure quant à la masse volumique de l'eau solide et celle de l'eau liquide ? Lorsque le glaçon a fondu, le niveau de l'eau dans le verre est-il monté ? descendu ? resté inchangé ?

Ex-T6.2 Variation des fonctions d'état au cours d'une transition de phase

Une masse $m = 1\ g$ d'eau liquide est à la température de $50°C$ sous sa pression de vapeur saturante. On la vaporise entièrement sous cette pression $P_{\text{sat}} = 0,73\ bar$ à température constante. La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait.
Calculer lors de cette opération : **(a)** la variation d'enthalpie de l'eau ; **(b)** sa variation d'énergie interne ; **(c)** sa variation d'entropie.
Données : $R = 8,31 J.K{-}1.mol^{-1}$; masse molaire de l'eau : $M_{\text{eau}} = 18\ g.mol^{-1}$; masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{eau}} = 1000 g.L^{-1}$; enthalpie de vaporisation de l'eau à $50°C$: $\Delta_{\text{eau}}H = 340\ J.g^{-1}$.

Ex-T6.3 Un congélateur

Une machine frigorifique fonctionne réversiblement entre deux sources à $0°C$ et $20°C$. La source chaude représente l'atmosphère et la source froide une salle parfaitement calorifugée dans laquelle est stockée de la glace qui est maintenue à $0°C$ grâce à la machine frigorifique.
Calculer le prix de revient de 1 tonne de glace sachant que l'eau est introduite dans la salle frigorifique à la température de $20°C$.
Données : $c_P = 4,18\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$; $L_{fus} = 330\ J.kg^{-1}$; prix : 1 $kW.h = 0,15$ € et 1 m^3 d'eau $= 3$ €.

Ex-T6.4 Congélation de l'eau à l'aide d'un réfrigérateur

La pression atmosphérique est $P_{\text{atm}} = 1\ bar$. Dans un réfrigérateur schématisé par une machine ditherme fonctionnant de façon réversible, le fluide réfrigérant effectue des transferts thermiques avec une source chaude et une source froide. La source chaude est l'atmosphère extérieure à la température $T_c = 293\ K$ constante et la source froide est l'échantillon d'eau à congeler, sa masse est $m_0 = 10\ kg$ et T_F sa température variable.
La capacité thermique massique de l'eau liquide est $c = 4,18\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$. L'enthalpie massique de fusion de la glace à $0°C$ est $\Delta_{\text{fus}}H = 340\ kJ.kg^{-1}$. La température de fusion est notée T_f.
Dans l'état initial, l'eau est à la température T_c et la puissance constante fournie à la machine est $\mathcal{P} = 500\ W$.
1) Exprimer le temps τ_1 au bout duquel l'eau commence à geler, en fonction de m_0, c, T_f, T_C et $\mathcal{P}$. Effectuer l'application numérique.
2) Déterminer la durée τ_2 correspondant à la congélation de toute la masse m_0 d'eau, en fonction de m_0, $\Delta_{\text{fus}}H$, T_f, T_C et $\mathcal{P}$. Effectuer l'application numérique.
3) Pour un réfrigérateur fonctionnant de manière quelconque, calculer la masse de glace maximale m^* formée avec un kilowattheure d'énergie électrique lors de la congélation.

Ex-T6.5 Machine thermique et changement d'état

Dans un cycle de machine à vapeur, la phase motrice est une détente de la vapeur d'eau dans un cylindre fermé par un piston mobile. On supposera que cette détente est adiabatique et réversible.

L'état initial I correspond à une vapeur saturante sèche (soit : $x_{VI} = 1$) à la température $T_1 = 485\ K$ et à la pression $P_1 = \Pi(T_1) = 20\ bars$.
L'état final F correspond à une vapeur saturante à la température $T_2 = 373\ K$ et à la pression $P_2 = \Pi(T_2) = 1\ bar$.
On cherche à déterminer le titre en vapeur x_{VF} dans l'état final :
1) En utilisant les données de la table ci-jointe :

		Liquide juste saturé : $x_V = 0$			$x_V = 1$		
T (K)	P (bar)	v_L $(m^3.kg^{-1})$	h_L $(kJ.kg^{-1})$	s_L $(kJ.K^{-1}.kg^{-1})$	v_V $(m^3.kg^{-1})$	h_V $(kJ.kg^{-1})$	s_V $(kJ.K^{-1}.kg^{-1})$
485	20	$1,18.10^{-3}$	909	2,45	0,0998	2 801	6,35
373	1	$1,04.10^{-3}$	418	1,30	1,70	2 276	7,36

2) Sans utiliser ces données ; mais en utilisant les enthalpies de vaporisation massiques à T_1, $l_1 = 1\,892\ kJ.kg^{-1}$, et à T_2 , $l_2 = 2\,258\ kJ.kg^{-1}$; ainsi que la capacité thermique massique de l'eau liquide : $c = 4,18\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.

Ex-T6.6 Distinction entre vapeur sèche et vapeur saturante

On introduit 4 g d'eau dans un récipient de volume $V = 10\ L$ maintenu à $80°C$.
1) Quelle est la pression régnant dans le récipient s'il était initialement vide d'air ?
2) On porte le récipient à $100°C$; quelle est la nouvelle pression ?
Données : $M(H_2O) = 18\ g.mol^{-1}$; P^* de l'eau : $0,466.10^5\ Pa$ à $80°C$; $P^{*\prime} = 1,013.10^5\ Pa$ à $100°C$; $R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Ex-T6.7 Méthode simple de détermination de l'enthalpie de fusion de l'eau

1) Dans un calorimètre de valeur en eau $M = 20\ g$, on dispose une quantité d'eau liquide de masse $m_1 = 200\ g$ à la température ambiante $t_1 = 25°C$. Puis on ajoute une quantité d'eau solide de masse $m_2 = 10\ g$ à la température t_2, $t_2 = -5°C$.
Lorsque l'équilibre thermique est réalisé, on repère la valeur de la température finale, $t_f = 20,4°C$.
(a) On néglige les pertes du calorimètre, calculer la valeur de l'enthalpie de fusion de la glace. On donne la chaleur massique de l'eau liquide : $c_{(l)} = 4,18\ J.g^{-1}.K^{-1}$ et celle de l'eau solide $c_{(s)} = 2,1\ J.g^{-1}.K^{-1}$. On suppose ces quantités constantes sur les intervalles de températures de l'expérience.
(b) En déduire les variations d'entropie de chaque masse d'eau au cours de la transformation. Commenter leurs signes.
2) On suppose maintenant que la puissance de pertes, $\mathcal{P}_{pertes}$, du calorimètre est constante.
(a) Montrer que l'on peut, en réalisant deux manipulations, déterminer une nouvelle valeur de l'enthalpie de fusion de l'eau.

On note Δt l'intervalle de temps nécessaire pour arriver à l'équilibre thermique.

(b) Les résultats des deux mesures sont rassemblés dans le tableau suivant, en déduire la nouvelle valeur de l_f.

	Expérience 1	Expérience 2
t_1 $(°C)$	25	25
t_2 $(°C)$	-5	0
t_f $(°C)$	20,4	16,3
m_1 (g)	200	200
m_2 (g)	10	20
Δt (min)	5	5

Ex-T6.8 Surfusion du Phosphore

On étudie un phénomène de " retard à la solidification " : certains corps purs sont susceptibles d'exister à l'état liquide, sous une pression donnée, à une température inférieure à leur température de fusion. Ce phénomène porte le nom de surfusion. Il nécessite des conditions expérimentales particulières et peut cesser lors de l'introduction d'un cristal de solide, d'une impureté ou en cas d'agitation du récipient contenant le liquide surfondu.
Soit un récipient calorifugé contenant une masse $m = 10\ g$ de phosphore liquide surfondu à la température $t = 34°C$ sous la pression atmosphérique.
1) On fait cesser la surfusion et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé du phosphore. Déterminer la masse respective de chacune des phases.

On donne pour le phosphore : $T_f = 317\ K$; $l_f(T_f) = 20,9.10^3\ J.kg^{-1}$ sous la pression atmosphérique et $c_{P(liq)} = 0,795\ J.g^{-1}.K^{-1}$.
(Ces valeur sont supposées indépendantes de la température dans l'intervalle considéré.)
2) Calculer la variation d'entropie correspondante.
3) Quel serait l'état final du système si on faisait cesser la surfusion d'une même masse de phosphore initialement à la température $t' = 17,5°C$?
Donnée : $c_{P(sol)} = 0,840\ J.g^{-1}.K^{-1}$.

Ex-T6.9 Liquéfaction du diazote par une détente isentropique
On cherche à obtenir du diazote liquide à la température $T_0 = 78\ K$ pour laquelle la pression de vapeur saturante vaut $\Pi(T_0) = P_0 = 1,0\ bar$.
Dans la machine de Claude, on réalise pour cela une détente réversible dans une turbine parfaitement calorifugée de l'état E_1 $\{P_1;\ T_1 = 160\ K;\ s_1 = 1,76\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}\}$ correspondant à du diazote gazeux comprimé vers l'état E_2 $\{P_2 = 1,0\ bar;\ T_2 = 78\ K;\ s_2\}$ correspondant à un système diphasé liquide-vapeur.
Il ne reste plus qu'à séparer le liquide de la vapeur.
On donne, à la température $T_2 = 78\ K$ et à la pression de vapeur saturante $\Pi(T_2) = P_2 = 1,0\ bar$, les entropies massiques $s_{2L} = 0,44\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$ du diazote liquide et $s_{2V} = 2,96\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$ du diazote gazeux.
Q : Déterminer la masse m_L de diazote liquide récupéré par kilogramme de diazote traversant le compresseur.

Ex-T6.10 Liquéfaction du diazote par détente de Joule-Kelvin
On cherche à obtenir du diazote liquide à la température $T_0 = 78\ K$ pour laquelle la pression de vapeur saturante vaut $\Pi(T_0) = P_0 = 1,0\ bar$.
Dans la machine de Linde, on fait subir au diazote une détente isenthalpique (détente de Joule-Kelvin) de l'état initial E_1 $\{P_1;\ T_1 = 290\ K;\ h_1\}$ correspondant à du diazote gazeux comprimé vers l'état E_2 $\{P_2 = 1,0\ bar;\ T_2 = 78\ K;\ h_2\}$ correspondant à un système diphasé liquide-vapeur.
Il ne reste plus qu'à séparer le liquide de la vapeur.
On adopte l'expression approchée de l'enthalpie massique h du diazote gazeux :

$$h = c_P T + b\,P + k,$$

avec : $c_P = 1,04\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$; $b = -1,51\ kJ.kg^{-1}.bar^{-1}$ et $k = 150\ kJ.kg^{-1}$.
On donne les enthalpies massiques $h_{2L} = 34\ kJ.kg^{-1}$ du diazote liquide et $h_{2V} = 230\ kJ.kg^{-1}$ du diazote gazeux à la température $T_2 = 78\ K$ et à la pression de vapeur saturante $\Pi(T_2) = P_2 = 1,0\ bar$.
1) Jusqu'à quelle pression minimale P_{1m} doit-on préalablement comprimer le diazote gazeux pour obtenir effectivement un mélange diphasé dans l'état E_2 ?
Déterminer le titre en vapeur x_{V2} dans le mélange diphasé à la sortie du détendeur pour $P_1 = 200\ bars$.
2) En réalité, on refroidit le diazote gazeux après la compression avant de lui faire subir la détente isenthalpique, de telle sorte que T_1 est inférieure à $290\ K$.
Déterminer la température minimale T_{1m} en dessous de laquelle il faudrait refroidir le diazote pour obtenir du diazote liquide à la sortie du détendeur avec $P_1 = 200\ bars$.

Ex-T6.11 Machine à vapeur
Dans une machine motrice à vapeur d'eau fonctionnant en régime permament, une masse $m = 1\ kg$ d'eau liquide de capacité thermique massique constante c, de volume massique v, se trouve dans l'état A sur la courbe d'ébullition : $\{P_A = P_{\mathsf{sat}}(T_2),\ v_A,\ T_A = T_2\}$
Elle décrit le cycle réversible suivant :
- $A \rightarrow B$: chauffage et vaporisation totale de l'eau dans une chaudière considérée comme une source chaude à la température T_2.
- $B \rightarrow C$: la vapeur juste saturante obtenue est injectée dans un piston isolé thermiquement dont

le volume augmente ; la vapeur se condense partiellement de façon réversible et la température diminue jusqu'à la température T_1 ; le titre massique en vapeur en C est noté x.
- $C \to D$: tout le reste de la vapeur est condensé à la température T_1 ; l'eau entre dans la chaudière.
- $D \to A$: l'eau est à nouveau chauffée le long de la courbe d'ébullition jusqu'à la température T_2.

Données : $T_1 = 373\ K$; $T_2 = 485\ K$; $c = 4,18\ kJ.kg^{-1}$; $l_v(T_1) = 2,26.10^3\ kJ.kg^{-1}$; $l_v(T_2) = 1,89.10^3\ kJ.kg^{-1}$.

1) Représenter le cycle $ABCDA$ dans le diagramme de Clapeyron massique.

2) Calculer la variation d'entropie massique de l'eau $\Delta s_{D\to A}$ entre D et A.

3) Exprimer la variation d'entropie massique de l'eau $\Delta s_{A\to B}$ entre A et B en fonction de T_2 et de la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau $l_v(T_2)$ à la température T_2. Effectuer l'application numérique.

4) Quelle est la variation d'entropie massique $\Delta s_{B\to C}$ entre B et C ?

5) Déterminer la variation d'entropie massique de l'eau $\Delta s_{C\to D}$ entre B et C en fonction de x, T_l et de la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau $l_v(T_2)$ à la température T_1.

6) Déduire des questions précédentes l'expression de x en fonction de c, T_1, T_2, $l_v(T_1)$, et $l_v(T_2)$. Calculer sa valeur.

7) Calculer le transfert thermique Q_2 fourni par la chaudière pour chauffer l'eau liquide de T_l à T_2 au cours de la phase $D \to A$ puis pour la vaporiser entièrement à la température T_2 au cours de la phase $A \to B$. Commenter son signe.

8) Calculer la quantité de chaleur Q_1 reçue par l'eau lors de la condensation de la vapeur au cours de la phase $C \to D$. Commenter son signe.

9) Quel est le travail W reçu par la masse m d'eau au cours du cycle ?

10) Définir l'efficacité ou rendement e de la machine. Calculer sa valeur.

11) Comparer sa valeur avec l'efficacité e_C d'une machine ditherme fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les mêmes sources de chaleur de températures T_1 et T_2.

